

Niveau(x) d'enseignement: 4
Centre d'intérêt: 841

Numéro EDUQ : 8870128

Mathématique, option II : plan de cours : la géométrie / Ministère de l'éducation, Direction générale des programmes, Direction générale des régions. -- [Québec] : Le Ministère, 1986.

24 p. : ill. ; 28 cm. -- (Matériel de soutien à l'implantation des programmes du secondaire)

Titre de la couv. Code: 16-3304-05; 8687-418.

Vedette(s)-secondaire(s): Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des programmes * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des régions

Descripteur(s): Mathématiques * Géométrie * Plan de cours * Activité d'apprentissage * Exercice * Matériel didactique * Secondaire (Ordre d'enseignement)

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option II en mathématiques au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants. Le document contient du matériel de soutien pour l'enseignement de la géométrie. L'introduction présente un extrait d'un texte de Raymond Anderson sur l'histoire de la géométrie. Suit le plan de cours proprement dit qui présente, en fonction des objectifs, neuf activités d'apprentissage et des exercices qui y correspondent. En annexe, l'auteur indique comment réaliser trente constructions géométriques.

Type de document: d



Gouvernement du Québec
Ministère
de l'Éducation

Direction générale des programmes
Direction générale des régions

16-3304-05

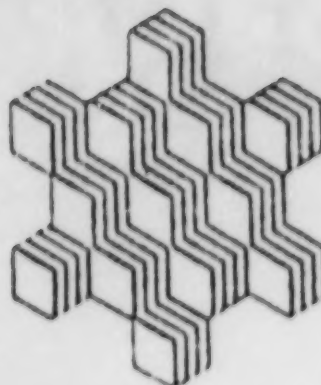
MATÉRIEL DE SOUTIEN À L'IMPLANTATION DES PROGRAMMES DU SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION II

PLAN DE COURS

LA GÉOMÉTRIE



OCTOBRE 1986

020400

4586005

Québec 

AVANT-PROPOS

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option II (064-534 et 064-531) en mathématique au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants.

Voici la liste des documents qui ont été rédigés.

<u>NUMERO</u>	<u>TITRE</u>	<u>AUTEUR</u>
16-3304-02	Les coniques	Paul Patenaude
16-3304-03	Les fonctions polynômiales	André Davidson René Parenteau Jean-Luc Bombardier
16-3304-04	Les fonctions trigonométriques	Denis De Champlain Pierre Mathieu
16-3304-05	La géométrie	Pierre Mathieu

Le contenu de ces documents n'engage que les auteurs. Tout organisme scolaire qui le souhaite est autorisé à reproduire ces documents à condition d'en préciser la source.

LA GÉOMÉTRIE
de l'option II

064-534

PIERRE MATHIEU
Mars 1986

INTRODUCTION

En guise d'introduction au bloc sur la géométrie, il vous est apparu intéressant de livrer ici un extrait d'un texte de Raymond Anderson, paru à New York en 1951. Ce texte raconte l'histoire de la géométrie. Il nous permet de constater la place importante de la géométrie dans la vie de tous les jours; de plus, on y retrouve de façon importante différents éléments faisant partie du programme de géométrie de l'option II. Mais, laissons parler M. Anderson.

En 1700 avant notre ère, si vous aviez navigué sur le Nil, en Egypte, vous auriez pu vous demander si les deux hommes que vous voyiez sur la rive s'apprétaient à arbitrer un match de football, ou quelque jeu analogue - car le football a de très anciennes origines; ces deux personnages balançaient une corde le long des champs fertiles qui bordent le rivage; la corde était attachée à deux piquets, et ressemblait beaucoup aux piquets et aux cordes qui servent à apprécier les premières prises d'un jeu de football moderne. Il est peu probable bien sûr qu'ils s'en soient servi pour cet usage en 1700 avant notre ère. Ces gens étaient des armenteurs qui préparaient les champs pour les semailles du printemps.



INTRODUCTION

Le vieux père Nil venait juste de se retirer après avoir inondé les champs d'une terre d'alluvion très fertile et cette inondation annuelle faisait de ce mince ruban de terre passant à travers le désert, le jardin de l'Afrique et le siège d'une très ancienne civilisation: les crues du Nil, finalement, donnaient à manger aux Egyptiens, mais ils durent d'abord user de leur astuce pour savoir en profiter.

En réalité, ces joueurs de corde étaient de savants messieurs qui pratiquaient la géométrie appliquée. Les Egyptiens n'appelaient pas cela géométrie, ce ne fut que 1 000 ans plus tard que la mesure de la terre (géo en grec) devint géo-métrie, le même préfixe géo se retrouvant dans le nom de toutes les autres sciences originaires de la terre: géologie, géographie, etc... Plus prosaïquement, ils l'appelaient arpentage.

Que faisaient-ils exactement? ils mesuraient des champs rectangulaires d'égales dimensions pour que les fermiers et leurs esclaves les cultivent. Ils portaient d'une longue ligne tracée entre deux piquets sur le bord de la rivière. Quand ils avaient mesuré, disons 10 longueurs de cordeau, ils se mettaient ensuite à tracer une ligne vers l'intérieur formant le coin d'un carré par rapport à la ligne de la rive.

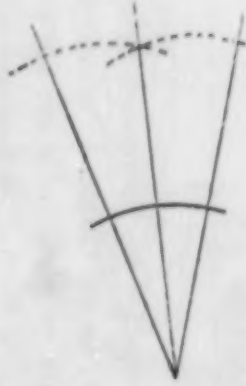
Voici comment ils procédaient: l'équipier en amont tenait sa perche en place et celui d'aval, tirant sur la corde pour qu'elle reste bien tendue, promenait la corde et sa perche en faisant deux marques en position sur la corde pour qu'elle reste bien tendue, l'autre vers l'intérieur des terres. Il revenait alors à sa position de d'arc de cercle l'une sur la rive, l'autre vers l'intérieur des terres. Les deux endroits où les marques circulaires initiales et son collègue refaisait la même chose de son côté. Les deux endroits où les marques circulaires se croisaient marquaient la limite de deux champs descendant vers la rivière, qu'il ne restait plus qu'à tracer au cordeau. Ils recommençaient cela indéfiniment et, à la nuit tombée, l'immense étendue se trouvait divisée en champs rectangulaires bien délimités, tous prêts à être enssemencés.

Certes, à l'école de la géométrie égyptienne, on ne leur demandait pas d'être démesurément intelligents pour faire l'arpenteur: ce jeu-là ne s'apprenait pas dans les livres; ce n'était qu'une part de la routine de la vie de tous les jours. Mais après que vous ayez appris à diviser un champ en carrés, la question se trouvait soulevée tout naturellement: comment diviser un angle en deux angles égaux?

Pour cela, l'un des arpenteurs s'en allait au sommet, là où les deux côtés de l'angle se rejoignent. L'autre faisait sur le sol des marques sur les deux côtés de l'angle. Ensuite, l'un d'eux marquait une ligne courbe pendant que l'autre tenait son piquet là où la première marque rencontrait le côté de l'angle. Enfin, le deuxième équilibrait en faisant de même sur l'autre côté de l'angle. L'endroit où se croisaient les seconde et troisième marques faites était un point qui divisait l'angle en deux parties égales.

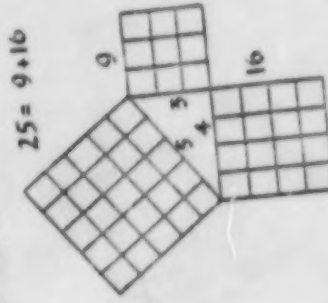


Ce procédé était mis en pratique couramment par les arpenteurs égyptiens en 1700 avant notre ère: il n'y a là rien de difficile et pourtant, 1500 ans après, quand cette opération finit par s'inscrire dans les traités de géométrie grecs, elle s'était passablement compliquée, car de la simple opération de couper un angle en deux, les Grecs s'amusèrent à faire un exercice de gymnastique mentale: il fallait prouver que ces deux morceaux d'angle étaient bien égaux.



Trois mille ans plus tard, quand ce petit exercice des arpenteurs égyptiens apparut dans nos manuels de géométrie, il s'était acquis, un peu compliqué, un nom célèbre: le Pont aux Ânes. Naturellement, n'importe quel imbécile est capable de diviser un angle en deux, ce n'est pas cela qui est important; ce qu'il faut, c'est prouver que vous avez bien divisé l'angle initial en deux morceaux égaux et si vous le savez, vous avez le droit de franchir le «Pont aux Ânes» pour étudier un peu plus de géométrie; vous le passez ou vous ne le passez pas, mais ceux qui ne le passent pas sont évidemment des ânes!

A une bonne distance de l'autre côté du pont aux ânes se trouve un très célèbre triangle que les Egyptiens connaissaient déjà à l'époque des arpenteurs. C'est le triangle magique 3 - 4 - 5.



$$25 = 9 + 16$$

Ce n'est probablement pas les Egyptiens qui ont découvert qu'il était si magique: il est bien probable qu'ils l'ont appris des Babyloniens qui vivaient loin de l'autre côté de la Mer Rouge, au-delà de l'Arabie, dans les vallées verdoyantes du Tigre et de l'Euphrate. En tout cas, des tablettes d'argile cuite qui datent d'environ 4 000 ans montrent que

INTRODUCTION

les Babyloniens connaissaient le

fameux triangle 3 - 4 - 5.

Nous allons en voir beaucoup de ce genre, aussi attendons-nous un peu à voir ce qu'il avait de si fameux pour être appelé magique par les anciens.

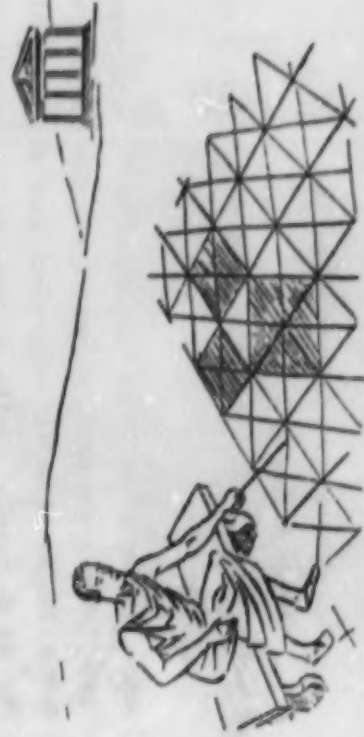
Babyloniens et Egyptiens partirent d'une ligne sur laquelle ils mesurèrent quatre longueurs avec une perche. Ils construisirent ensuite un angle droit et mesurèrent sur son côté trois longueurs. Or, quand ils reliaient les deux extrémités libres et qu'ils mesuraient leur distance, ils trouvaient exactement toujours ces cinq longueurs exactement!

Ce qui est bien plus remarquable encore, c'est qu'en construisant des carrés sur les trois côtés, le carré sur le côté 3 a 9 carreaux, celui sur le côté 4 en a 16 et celui sur le côté 5 en a 25, c'est-à-dire justement la somme des carrés sur les deux autres. C'est tout ce que les Babyloniens et les Egyptiens apprirent 18-dessus en 1500 ans. Cette réflexion vous consolera si vous vous sentez un peu en retard en géométrie: l'humanité a mis 1500 ans avant de faire un pas de plus dans ce fameux triangle: alors ne vous sentez pas des oreilles d'âne vous pousser sur la tête parce que vous n'avez pas pu franchir le célèbre pont. Il n'est pas parfaitement équitable de vous demander de comprendre en 15 minutes un soir à la maison ce qu'il a fallu à l'humanité 1500 ans pour trouver.



Le sieur Pythagore était un grec qui se trouvait dans sa prime jeunesse aux environs de 550 avant notre ère. Il passa une partie de sa vie dans la colonie grecque qui se trouvait dans le sud de l'Italie. Il ne mangeait pas de fèves, pour garder sa ligne et, s'intéressant vivement à la mesure de la terre, se qualifiait donc de «géomètre», ce qui fait tout de suite beaucoup plus élégant qu'arpenteur. Mais les méthodes pratiques simples ne le satisfaisaient pas: les Grecs étaient piqués par une mouche qu'on appelle l'esprit scientifique. L'époque était prospère, les esclaves faisaient le travail fatigant; on construisait de beaux temples de marbre et les messieurs se rencontraient sur la place du marché pour discuter politique, puis s'orientaient vers d'autres sujets: la géométrie par exemple.

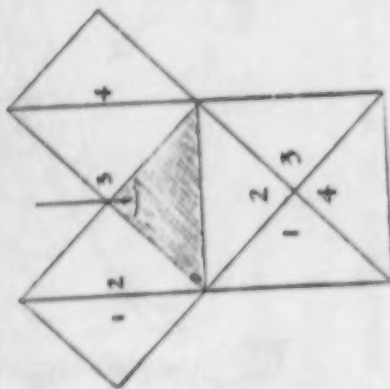
Vous avez vu des photos de places pavées de marbre de la Grèce antique: eh bien, une légende nous raconte que ce Monsieur Pythagore contemplait un jour un de ces pavés de marbre. Il savait que les tailleurs de pierre avaient toujours eu beaucoup de difficultés pour éviter que les grandes dalles de marbre se fendent par le milieu et que l'architecte leur avait donné pour cela un dessin plus commode à faire juste avec des demi-carrés, ce qui rendait leur tâche plus aisée. Par-dessus le marché, le dessin était plus joli quand les dalles étaient en place dans le pavage.



INTRODUCTION

Pythagore trouva ce dessin non seulement joli mais aussi tout à fait intéressant. «Messieurs», dit-il à ses disciples en désignant un groupe de dalles du pavage, «vous avez ici un triangle avec un coin droit. Et le carré sur le grand côté qui forme ce triangle contient 4 dalles triangulaires, ces carrés sur les deux côtés latéraux du triangle en contiennent 2 chacun; 4 pavés égalent 4 pavés, nous disposons donc ici d'un autre triangle dans lequel, comme pour le triangle babylonien $3 - 4 - 5$, le carré construit sur le plus grand côté est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.»

Vraiment Pythagore devait se sentir content de lui; c'était le triomphe de l'esprit scientifique grec: observation, raisonnement; pour être scientifique la première condition est d'avoir l'oeil vif.



«Très bien, très bien, en effet, répliqua quelqu'un dans le groupe, mais...» Ça y est, nous y sommes, quelqu'un a dit «Mais...»: il fallait bien qu'il y eût un contradicteur pour échauffer la discussion (ça n'a pas tellement changé)... «Mais», dit l'incrédule, en s'éclaircissant la voix, avec le triangle babylonien, les deux côtés autres que l'hypoténuse... (pour se donner plus d'assurance, il se servait du mot savant d'hypoténuse pour le grand côté)... Je disais donc que le carré de l'hypoténuse du triangle $3 - 4 - 5$ est égal à la somme des carrés des deux autres côtés dans des conditions très spéciales, l'un des côtés doit avoir 3 unités et l'autre 4. Or, dans votre nouvel exemple, citoyen Pythagore, vous lui imposez une autre

condition très spéciale, celle que les deux petits côtés soient égaux. Mais si je faisais un triangle rectangle différent, comment vos tailleurs de marbre pourraient-ils nous aider à résoudre le problème? Et il dessina un triangle rectangle quelconque sur la poussière du pavé.

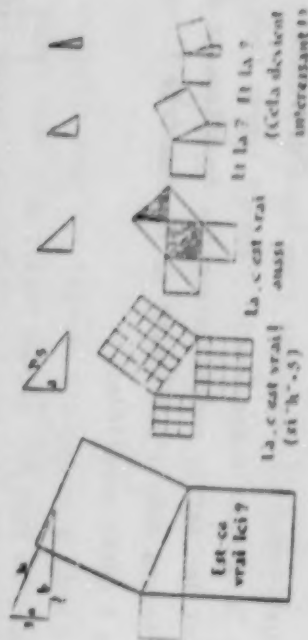
La-dessus on se sépara. Pythagore n'avait pas beaucoup apprécié ce critique mais il devait bien reconnaître que celui-ci montrait le vrai esprit scientifique grec: deux triangles particuliers comme le triangle 3 - 4 - 5 ou celui des demi-carreaux de pavage ne prouvent rien. On doit pouvoir choisir n'importe quel exemple et on doit prouver une vérité scientifique sur les triangles rectangles en utilisant en général n'importe quel triangle.



Tout de même, Pythagore était convaincu qu'il était dans la bonne voie. Il tourna et retourna dans son esprit tous ces triangles. Réfléchissant, il se mit à utiliser une sorte d'abréviation, il donna aux deux petits côtés latéraux des noms, alpha ou a pour l'un, bêta ou b pour l'autre, et appela h l'hypoténuse. En grec, l'hypoténuse est une chose qui en soutient une autre, ou la maintient par-dessous, de «au-dessous» (hypo) et «côté» (ténuse). L'hypoténuse s'opposant au plus grand des trois angles du triangle qui est l'angle droit, elle est toujours le plus long des trois côtés.

Pythagore se fit ce petit raisonnement: dans le triangle 3 - 4 - 5, a vaut 3, b vaut 4, leurs carrés 9 et 16 qui, ajoutés, donnent 25 tout juste, soit l'hypoténuse au carré, écrivons-la h^2 . Dans le triangle des pavés, il y a 2 pavés dans le carré du côté a, 2 du côté b et 4 sur le côté de l'hypoténuse. Très bien. Mais dans le triangle que ce sceptique disciple lui avait présenté, a et b avaient n'importe quelle longueur et Pythagore se sentait complètement perdu.

Alors il se fit pour lui-même un autre triangle. Le côté a avait toujours 3 longueurs, mais le côté b était si petit qu'on pouvait à peine le voir, le carré du côté b était alors pratiquement égal au carré sur que a^2 et que ce microscopique morceau était f^2 . Idée géniale, restait à prouver.



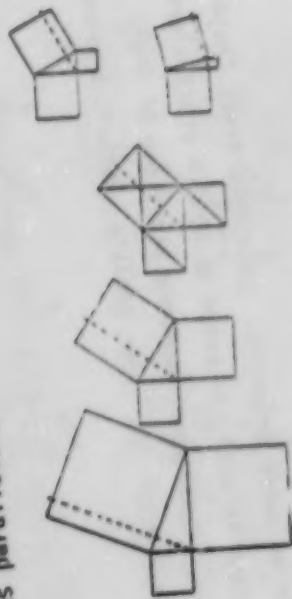
Suivant les règles qui guident ceux imprégnés du vrai esprit scientifique, que grec, la dernière chose que fit Pythagore fut de mettre par écrit et en ordre tous les résultats de son observation. Voici un dessin de ce qu'il avait à examiner. En le regardant de près on voit pourquoi Pythagore était sûr de se trouver sur la bonne piste, et l'on imagine pourquoi il était mécontent, plus peut-être de lui-même que de son incrédule disciple, de ne pas arriver à prouver que le carré de toute hypoténuse était égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

INTRODUCTION

Pythagore était très excité : il se précipita sur tous les autres triangles qu'il avait tracés et y traça en pointillé à partir de l'angle droit la perpendiculaire à l'hypoténuse. Ce qu'il obtint est indiqué sur la figure ci-dessous.

Dans ce triangle fait avec des pavés où les deux côtés étaient égaux, il le divisait le pointillé divisait le carré de l'hypoténuse en deux parties égales. Dans tous les autres, il le divisait en deux parties et il ne mit pas longtemps à voir que la grandeur de chaque partie paraissait être la même que celle du carré qui se trouvait à côté.

Pythagore se dit avec impatience : « Si seulement j'arrivais à prouver cela ! » Il disposait d'un bon nombre d'artifices puisés dans la géométrie des Grecs. Ceux-ci, après tout, avaient passé un temps considérable à polir et mettre au point les outils rudimentaires des Égyptiens et des Babyloniens et même à en réajuster quelques autres. Il rechercha dans l'équipement de la géométrie l'instrument dont il avait besoin pour manipuler les aires de figures à côtés parallèles.



Cette géométrie disait que toute figure ayant des côtés parallèles, carré, rectangle ou parallélogramme, avait une aire égale au produit de sa base par sa hauteur, et que, de plus, tout triangle avait une aire égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Pythagore s'embarqua alors dans le cas général d'un triangle rectangle quelconque dont les côtés a et b avaient n'importe quelle longueur. Ce qu'il voulait prouver c'est que

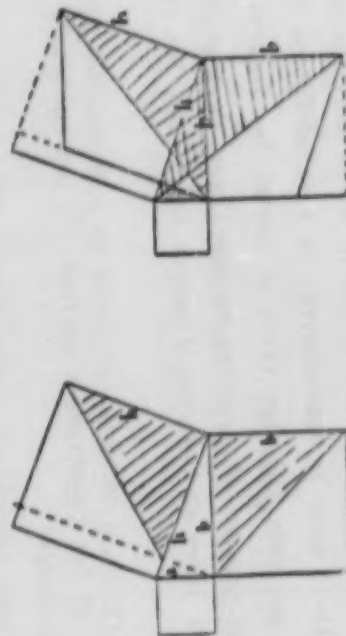
$$a^2 + b^2 = h^2$$

Ayant dessiné la perpendiculaire à l'hypoténuse à partir de l'angle droit et l'ayant prolongée pour couper le carré de l'hypoténuse, il obtint un rectangle. La moitié de cette aire était un triangle de même base et même hauteur que le rectangle (partie gauche du dessin ci-après).

La moitié de l'aire du carré inférieur était aussi un triangle de base b et de hauteur b aussi.

C'est là qu'intervient l'unique artifice de la part de Pythagore. Il utilisa la règle qui lui disait que la moitié d'un parallélogramme est l'aire d'un triangle de même base et de même hauteur. Il transforma le rectangle supérieur et le rectangle inférieur en deux parallélogrammes puis coupa ceux-ci en deux.

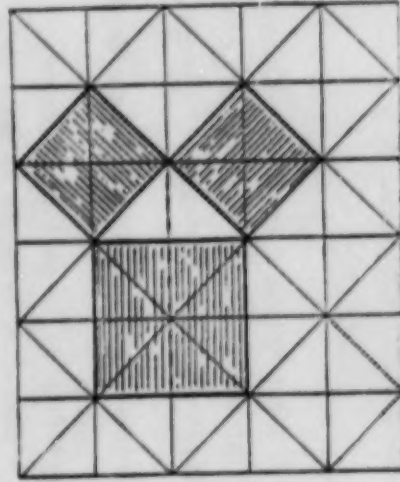
Et voilà deux triangles bien intéressants. Chaque triangle avait h d'un côté et b de l'autre. Les angles de chaque triangle avant ces deux côtés étaient les mêmes puisqu'ils étaient constitués d'un angle droit plus le petit angle opposé au côté a . Or, on savait déjà que, quand les deux côtés d'un triangle et l'angle entre eux sont égaux à ceux d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux.



Cela n'arrive pas souvent que vous puissiez vous asseoir et examiner tous les éléments qu'un grand inventeur avait devant lui quelques jours ou quelques heures avant que la découverte soit faite. A quoi rêvait M. Bell quand il inventa le téléphone? Qu'est-ce que M. Morse avait gribouillé sur son papier quand il inventa le télégraphe? Qu'y avait-il dans le laboratoire, la nuit où Edison fit sa première lampe électrique? Eh bien, vous avez devant vous à peu près tous les faits et toutes les incertitudes que Pythagore avait devant lui quand il fit une des plus grandes découvertes mathématiques de tous les temps. Vous pourriez les regarder pendant des heures et des jours et beaucoup d'autres pourraient les regarder sans résultat pendant des mois et même des années.

Après tout, les Babyloniens et les Egyptiens n'avaient-ils pas contemplé le triangle 3 - 4 - 5 pendant 1500 ans sans rien trouver?

J'ai l'impression que Pythagore commença par prendre une vue un peu plus élargie du triangle de pavage: probablement regarda-t-il deux des petits triangles qui en constituaient un grand. Le carré de l'hypoténuse se trouvait maintenant constitué de 8 pavés et chaque carré sur les deux côtés de 4 pavés, mais il y avait une ligne extrêmement intéressante qui apparaissait, celle qui partait du coin de l'angle droit et était perpendiculaire à l'hypoténuse, elle passait à travers le carré de cette hypoténuse et divisait celui-ci en deux moitiés: chaque moitié avait 4 pavés et chacun des carrés construits sur les petits côtés en avait 4 aussi, voilà qui devenait intéressant!



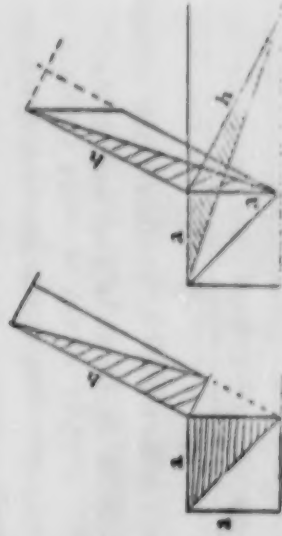
Ça y était! Pythagore tenait sa démonstration. Les deux triangles qui étaient égaux l'un à l'autre étaient des moitiés de parallélogrammes. Donc les parallélogrammes eux-mêmes étaient égaux puisque leurs moitiés étaient égales, car celui du bas était égal au carré sur b , celui du haut au morceau du carré de h découpé par la perpendiculaire à l'hypoténuse.

Après que Pythagore eût découvert cet artifice, il prouva très vite de la même façon que le carré de a était égal à l'aire de la longue bande étroite coupée de l'autre côté par la perpendiculaire à l'hypoténuse. Le triangle ayant a pour base et h pour un de ses côtés parce que sa hauteur était encore a , l'angle entre a et h était constitué d'un angle droit et du coin du triangle auquel était opposé ah . La moitié du long parallélogramme était un triangle contenant aussi cet angle, l'angle opposé en b et l'angle droit. Les côtés qui enserraient cet angle étaient a et h . Ayant deux côtés et l'angle entre eux égaux les deux triangles étaient égaux, les parallélogrammes étaient égaux, rectangle et carré étaient égaux; que d'égalités!

Or, quand on ajoutait les deux parties de l'hypoténuse, elles étaient égales à la somme des carrés des côtés, dans n'importe quel triangle.

Et Pythagore avait prouvé ce qu'il voulait: le carré de l'hypoténuse était égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Q.E.D.! - Quod erat demonstrandum! citation très connue des maîtres d'école romains, qu'on traduit quelquefois par C.Q.F.D. (Ce qu'il fallait démontrer!)



INTRODUCTION

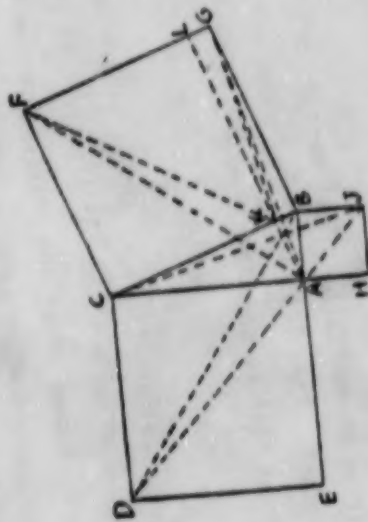
Pythagore s'en revint le lendemain revoir ses amis géomètres. Il attendait son incrédule compagnon, et, d'un petit air de ne pas y toucher, lui riva son clou de la façon la plus magistrale!

Evidemment à l'époque de Pythagore, vers 550 avant notre ère, l'imprimerie n'était pas inventée, et les compte-rendus des séances de géométrie devaient être brefs puisqu'on écrivait tout à la main. Aussi, les géomètres eurent-ils la fâcheuse idée d'avoir recours à une sténographie dans laquelle ils représentaient les figures par des lettres. Voici un petit échantillon relatif à la découverte de Pythagore. Si on ne sait pas à l'avance de quoi il s'agit on ne peut pas dire que ce soit lumineusement clair.

Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés.

Théorème: (proposition générale non évidente qu'il convient de démontrer). Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés.

En A sur AB élevez la perpendiculaire AC, tracez BC pour former un triangle rectangle ABC. Construisez les carrés ACDE, ABHI, BCFG. De A abaissez la perpendiculaire AK à BC et prolongez-la jusqu'en L à la rencontre de FG. Tracez KG, AG, JA, JC, DA, DB, FK, FA.



Démonstration: le tout est égal à la somme des parties, BCFG est donc égal à KCFL plus KLGB, et ABJH est égal à ABJ plus AJH. ACDE est égal à ACD plus ADE; CFLK est égal à CFK plus FLK et BGLK est égal à BGK plus KLK.

Les triangles de même base et même hauteur sont égaux. Donc BJA égale BJC; BGK égale BGA, CFK égale CFA; CDA égale CDB. Les triangles ayant deux côtés égaux ainsi que l'angle compris entre eux sont égaux; donc BJC égale ABG; CDB égale CFA.

Conclusion : donc BCFG égale ABJH plus ACDE, c.q.f.d.!

Vous avez compris? Alors vous avez de la chance. Avec des démonstrations pareilles, il n'y a rien d'étonnant à ce que vous trouviez la géométrie un peu abstraite: vous passez la plus grande partie de votre temps à faire la chasse aux lettres tout autour des carrés à moins que vous ne cherchiez à vous mettre dans la tête le système encore plus compliqué des notations. Il est tout de même plus raisonnable d'examiner comment la question surgit. Quand on se souvient que Babyloniens et Egyptiens connaissaient le triangle magique 3-4-5 depuis des centaines d'années avant que ce roubillard de Pythagore ait réussi à dénicher le problème, on commence à voir le problème avec plus de familiarité.

Deux cents ans après Pythagore, un autre Grec nommé Euclide se mit dans la tête de faire un résumé d'à peu près tout ce que les grecs savaient en géométrie et d'écrire cela bien au propre dans un traité. Euclide était un esprit très logique et ça se voit très nettement dans son livre. Il commença par donner des définitions. Puis il rajouta quelques axiomes qui sont des vérités absolument évidentes - alors pourquoi les mettre, direz-vous: passons là-dessus! - telles que: la somme des parties est égale à l'entier, ou des choses égales à une même chose sont égales entre elles. Puis il incéra un petit chapitre relatif à tout ce que les Egyptiens et les Babyloniens connaissaient depuis 2 000 ans sur les droites, les angles, les carrés, les triangles et les cubes. Là-dessus il rajouta un chapitre sur les cercles, et leurs morceaux et sur les façons de mettre des cercles dans les triangles ou des triangles dans les cercles. Il continua dans cette excellente voie et mit des carrés dans les cercles, des pentagones, des hexagones, etc..., ce qui

INTRODUCTION

fait bien des façons de diviser la tarte : nous y reviendrons plus tard.

Euclide se mit alors dans les cubes, et autres figures solides: en d'autres termes il s'aiguilla vers la géométrie dans l'espace. Quelques chapitres suivirent sur les cylindres, les cônes et les sphères et tout cela bouclait ce que les Grecs savaient de la géométrie. Maintenant que nous avons jeté un coup d'oeil à la table des matières d'Euclide, essayons de regarder ses procédés.

Les définitions d'abord: les arpenteurs babyloniens ou égyptiens ne s'étaient guère souciés de dire ce que c'est qu'un point, pour eux c'était l'endroit où se tenait un des arpenteurs avec son piquet pendant que l'autre tournait autour. Mais les Grecs, esprits scientifiques, se devaient de le définir. Un point est quelque chose qui n'a pas de dimensions. Cette définition est plutôt négative, mais nous en verrons l'intérêt en définissant la droite: une droite est quelque chose qui n'a qu'une dimension; elle n'a en d'autres termes que sa longueur: c'est la trace laissée par un point qui se promène. Et que se passe-t-il quand on déplace une droite? on obtient un plan; il a, lui, deux dimensions: longueur, largeur et épaisseur. Et que se passe-t-il quand on déplace un solide: c'est là qu'on entre dans la quatrième dimension, qui a conduit tout droit nombre de brillants jeunes gens à la camisole de force; restons-en là, c'est préférable. Si vous aimez les dimensions multiples, la quatrième, la cinquième, la sixième, restez dans l'algèbre, ce sera plus sûr et vous ne risquez pas de vous endommager le cerveau.

Après avoir consciencieusement consacré un chapitre aux définitions, Euclide s'occupa des lignes. Il y a deux espèces de lignes: les droites et les courbes. Une droite est un mouvement dans une seule direction une courbe dans plusieurs directions successives. Si vous déplacez un point toujours dans la même direction vous créez une droite, mais si vous changez de direction de temps en temps la trajectoire est une courbe (voyez les ivrognes).

INTRODUCTION

Euclide se mit alors à compliquer un peu les choses. Il dit: qu'arrive-t-il quand on a deux points et qu'on introduit une droite: entre deux points on ne peut tracer qu'une droite, parce qu'il n'y a qu'une direction possible à prendre.

Euclide en vit de toutes les couleurs pour démontrer que si deux droites se rencontrent, elles ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point. Il admettait sans scrupules que les angles découpés par une droite sur le côté d'une autre font deux angles droits, c'est-à-dire un angle aplati, mais il éprouvait le besoin de faire toute une affaire pour démontrer que les angles opposés obtenus au croisement de deux droites sont égaux (fig. 1). Il discuta ensuite des triangles égaux qu'il appelait «congruents», c'est-à-dire susceptibles d'être placés l'un sur l'autre exactement.

Eh bien, les triangles sont égaux quand:

- deux côtés et l'angle qu'ils enferment sont égaux (fig. 2).
- 2 angles et le côté compris sont égaux (fig. 3);
- les trois côtés sont égaux (fig. 4): on aurait pu s'en douter!

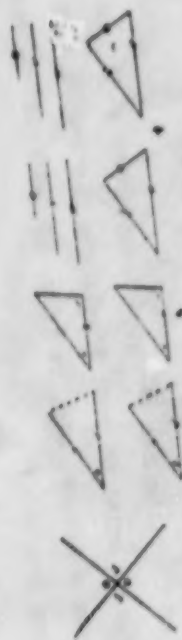
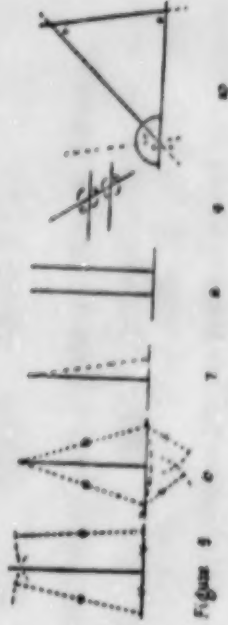


Figure 1

Rappelez-vous en tout cas qu'il faut toujours trois choses.

Euclide consacra alors un chapitre aux arpenteurs égyptiens et à leur façon de tracer des perpendiculaires. Ça sonne pompeux: «En un point on peut élever une perpendiculaire et une seule à une droite» (fig. 5). «D'un point on ne peut abaisser, etc...» (fig. 6), et celui-là: «La perpendiculaire est la plus courte distance d'un point à une droite» (fig. 7).

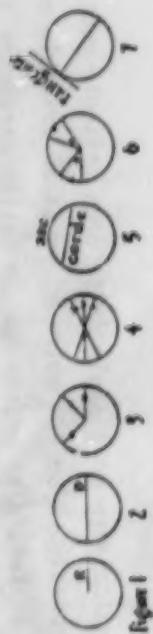


Figures 5 6 7

Deux perpendiculaires à une droite sont parallèles car elles ne se rencontreront pas, si loin qu'on les prolonge (fig. 8). Il nous montre ensuite que les angles opposés sont égaux quand deux parallèles sont coupées par une droite (fig. 9), ce qui nous conduit à la très intéressante conclusion que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits (fig. 10).

Après avoir donné encore un bon nombre de détails sur les triangles, Euclide introduit son chapitre sur le cercle. Au fait, que pensez-vous qu'un cercle puisse être? Babyloniens, Égyptiens, et Grecs ont tracé des cercles pendant des siècles: dans le livre d'Euclide, un cercle devient la courbe fermée limitant une partie du plan, et dont tous les points sont à une égale distance d'un point appelé centre. Cela paraît une curieuse manie de définir de cette façon des choses si familières, mais voilà ce qu'est un cercle d'après Euclide et tous les autres rédacteurs de manuels qui lui ont fait suite!

Le cercle a un rayon, la droite qui joint le centre à un point de la circonférence (fig. 1), il a aussi un diamètre qui est deux fois le rayon (fig. 2), de toute évidence tous les rayons



d'un même cercle, et tous ses diamètres par la même occasion, sont égaux les uns aux autres (fig. 3 et 4). Une partie de cercle est un arc (fig. 5), dont la droite qui joint les extrémités est la corde. Des arcs égaux mesurent des angles au centre égaux et réciproquement (fig. 6). Une perpendiculaire au rayon tracée à partir d'un point de la circonférence est une tangente au cercle (fig. 7).

Si deux cercles ont une corde en commun, la droite qui joint les centres coupe la corde par le milieu (fig. 8). Les angles entrent dans les cercles de bien des façons intéressantes. Tout angle obtenu en joignant un point sur le cercle aux extrémités du diamètre est un angle droit (fig. 9): c'est une propriété qui sert très souvent. On peut tracer un cercle à l'intérieur (fig. 10), ou à l'extérieur (fig. 11) de n'importe quel triangle, mais pour le faire il faut franchir le Pont aux Anes et savoir couper un angle en deux.

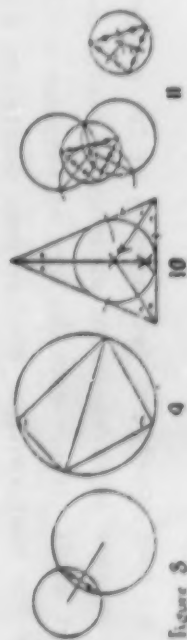


Figure 8

Les parties de la géométrie qui nous enseignent les rapports et les proportions commencent avec les parallèles. Si on trace une série de parallèles également espacées on divise une droite qui les traverse en parties égales (fig. 1). On peut aussi diviser deux droites de longueur différente en un même nombre de parties égales (fig. 1). Supposons que nous voulions diviser deux droites de 4 cm et 7 cm en 5 parties égales. On y arrive facilement avec des parallèles.



Supposons que nous ayons une droite de 9 cm de long, composée de deux morceaux l'un de 2 cm, l'autre de 7 cm. Le rapport des deux est $2/7$. Supposons alors que nous voulions maintenant diviser une droite de 11 cm en deux parties dans le rapport $2/7$. Il est compliqué de le faire par des fractions. Prenons un triangle et traçons une parallèle à sa base (fig. 2), c'est bien plus immédiat. La bissectrice de l'angle d'un triangle divise d'une part le côté opposé en deux parties dont le rapport est le même que celui des deux autres côtés du triangle (fig. 3).

Quand on abaisse une perpendiculaire de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, on obtient deux triangles qui sont semblables l'un à l'autre et aussi au triangle original (fig. 4). La longueur de la perpendiculaire est autant de fois plus grande que la petite partie de l'hypoténuse que la plus grande part de l'hypoténuse est plus grande que la perpendiculaire (fig. 5), par exemple dans les rapports $4/2$ et $2/1$. Dans cet exemple 2 est appelé moyenne proportionnelle et on peut trouver la moyenne proportionnelle entre deux nombres en les assemblant pour en faire le diamètre d'un cercle et élevant une perpendiculaire à l'endroit où ils se joignent.



Figure

Ce n'est que très tard qu'Euclide et les autres rédacteurs de manuels vous apprennent quelque chose que tous les arpenteurs savaient depuis toujours: que l'aire du rectangle est égale à la longueur d'un côté multipliée par celle de l'autre (fig. 6); et il n'y a à ce délai d'autre raison que cette question n'apparut pas plus tôt dans l'ordre logique de la géométrie. On vous apprend ensuite que l'aire du parallélogramme est aussi le produit de sa base par sa hauteur (fig. 7). Là-dessus on vous apprend qu'un triangle qui est la moitié de l'aire du parallélogramme correspondant à une aire égale à la moitié de celle du parallélogramme (fig. 8), ce qui ne représente pas un effort énorme de compréhension.

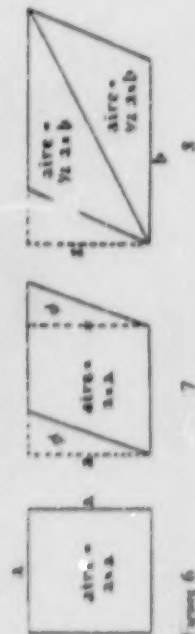
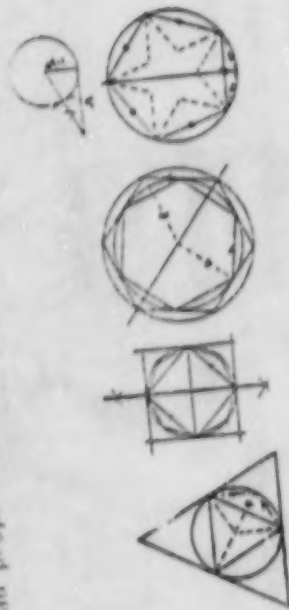


Figure 6

INTRODUCTION

La géométrie se décide alors à devenir un peu décorative, et nous apprend à faire des figures à 3, 4, 5, 6 côtés égaux dans le cercle ou autour d'un cercle. En divisant chaque côté en deux on obtient les polygones à 8, 10, 12, 16, 24 côtés, etc.... Rien qu'avec une règle et un compas et en suivant les indications des illustrations, on peut se distraire à peu de frais comme le faisaient probablement les artistes égyptiens leur jour de congé - s'ils en avaient! - Les figures à 3, 4 et 6 côtés sont faciles à faire, celles à 5 côtés sont très artificieuses, mais, quand vous les avez réussies, vous avez gagné l'étoile du mérite géométrique, au propre et au figuré!



Après le substantiel repas pythagoricien, terminons avec le découpage de la tarte entre une infinité de convives, ce qui nous donnera l'occasion de trouver le rapport de la circonférence au diamètre, ce mystérieux (pi) symbole du système mathématique.

Ce nombre aux propriétés merveilleuses a fait de nombreux progrès depuis les anciens temps où il valait à peu près trois: il s'est enrichi depuis de nombreuses décimales. A l'époque de la Bible on savait déjà que 6 rayons de roues représentaient à peu près la longueur du cordage qu'on pouvait mettre autour de la roue: 6... et il construisait un vase de 2 coudées de largeur et un cordeau de 6 coudées en faisait exactement le tour, ce qui faisait $\pi = \frac{6}{2} = 3$.

Depuis, les gens sont devenus plus exigeants: un célèbre Archimède - celui qui prenait des bains pour faire jaillir les idées - déclara que π devait faire $3 + \frac{1}{7}$. Il est élégant à notre époque de donner à

INTRODUCTION

la valeur 3,1416 et tout à fait raffiné de dire $\pi = 3,14159$. Si l'on veut aller jusqu'à 10 décimales, compter le nombre de lettres de chaque mot dans la phrase « Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages »: $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 5$, ce qui fait toujours beaucoup d'effet. Mais un mathématicien anglais a fait mieux en lui trouvant 707 décimales, ce qui bat tous les records de précision. Le nombre est un peu encombrant à transcrire avec toutes ces décimales; elles occupent une page. Si vous voulez vraiment les connaître, elles sont affichées au Palais de la Découverte, à Paris. Essayez par exemple de composer un poème dont le nombre de lettres de chaque mot soit égal au chiffre de chaque décimale: rassurez-vous, elles ne servent à rien!

L'une des multiples façons de trouver la valeur de π consiste à se servir de la géométrie du découpage des tartes: vous commencez par tracer un cercle et son diamètre. Si vous dessinez un hexagone qui a 6 côtés dans le cercle vous voyez que la longueur totale des côtés est 6 fois le rayon (3 diamètres) mais vous voyez bien que le cercle est un peu plus grand puisque vous avez pris une suite de raccourcis au lieu de suivre la circonférence.



INTRODUCTION

On voit que Recommençons alors avec un polygone à 12 côtés, que nous savons tracer à partir de l'hexagone. On voit que la longueur du trajet total est alors 3,1 fois le diamètre et on s'est nettement rapproché de la circonférence. Si nous le recommençons, et faisons un polygone régulier touchant le cercle en 24 points, puis un autre en 48, puis un en 96 points; nous trouvons une longueur qui croît correspondant à 3,14 diamètres. Si nous le recommençons en 192 points, notre π devient 3,141 45. Doubions encore, les mathématiciens qui vont plus loin em- mieux, mais ça devient très compliqué à tracer et, pratiquement, en faisant rouler une roue de 1 mètre sur le sol, elle parcourra à chaque tour 3,1416 mètres à 1/10 de millimètre près (1) !

Arrêtez-vous à 3,1416, c'est bien suffisant: en faisant rouler une roue de 1 mètre sur le sol, elle parcourra à chaque tour 3,1416 mètres à 1/10 de millimètre près (1) !

Prenons congé là-dessus du culte d'Euclide, des découvertes de Pythagore et du superbe bon sens des Egyptiens, nous retrouverons bien souvent leur ombre sur la route des mathématiques.

Nous espérons que cette magnifique histoire si bien racontée par Anderson, vous permettra d'avoir une meilleure vision de la géométrie.

PLAN DE COURS



EXERCICES ET REFERENCES

impliqués dans la résolution d'un problème.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1 : LA CONSTRUCTION D'UN DECAGONE REGULIER

M.F. La construction du décagone régulier est une activité synthèse à travers laquelle seront développées et démontrées de nombreuses relations, lesquelles seront identifiées au fur et à mesure de leur utilisation.

1. L'enseignant remet à chaque élève une feuille sur laquelle est tracé un cercle de 7,5 cm de rayon, ou bien il demande aux élèves de tracer un tel cercle avec leur compas.

2. Les élèves subdivisent ensuite ce cercle en dix arcs de 36° , à l'aide de leur rapporteur d'angle.

3. Les élèves marquent les points de coupure d'arcs, par les lettres A, B, C, ..., H, K, L et ils marquent le centre du cercle par la lettre O.

4. Les élèves tracent les rayons OA, OB, OC, ..., OH, OK et OL ou les diamètres AF, BG, CH, DK et EL.

Insister fortement sur la précision, car de minuscules erreurs peuvent avoir des conséquences importantes.

Dans le sens des aiguilles d'une montre!

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

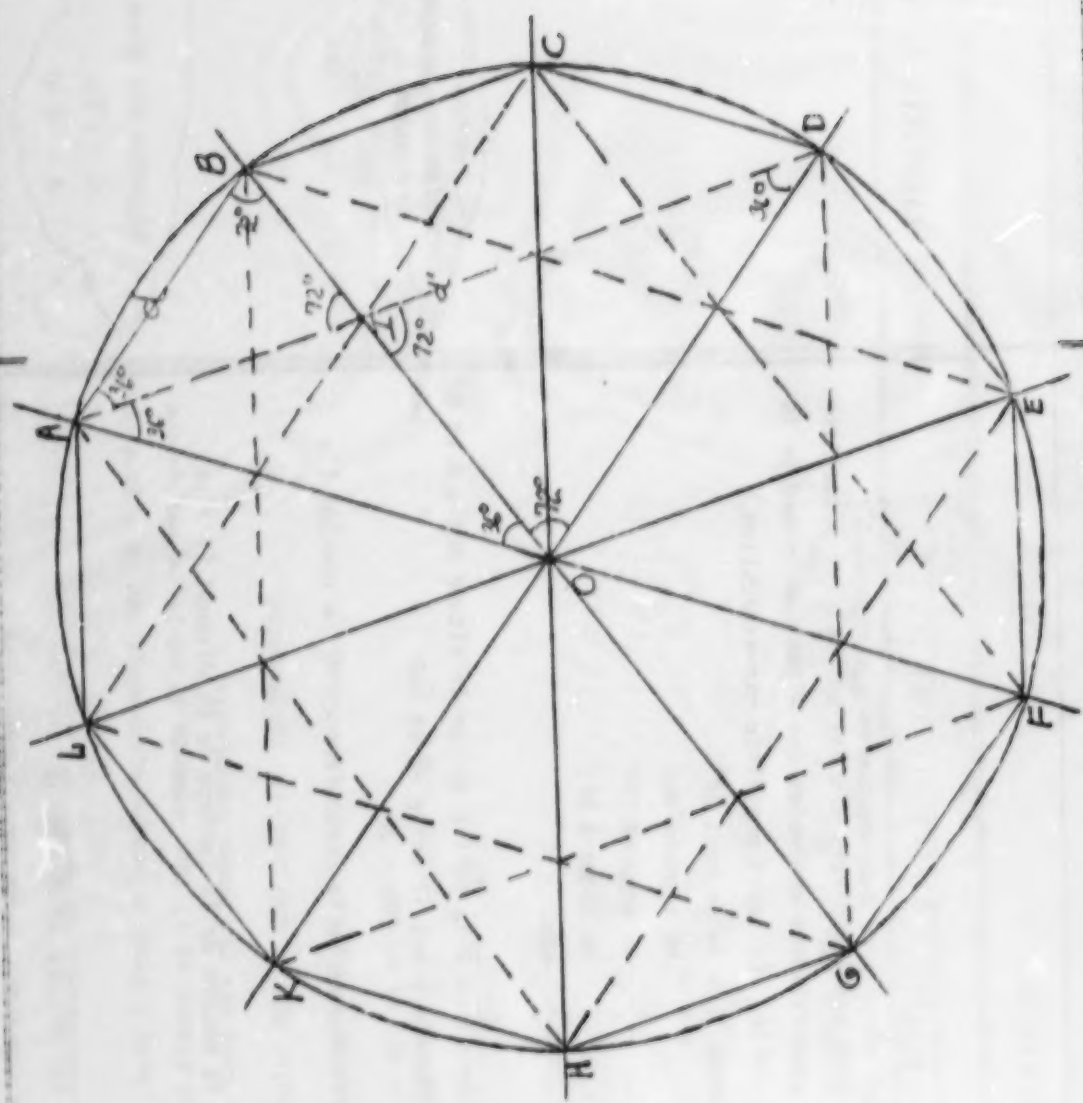
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

NOTE: L'enseignant devrait posséder une acétate de cette construction, afin de vérifier rapidement les constructions des élèves.

5. Les élèves construisent d'abord le décagone régulier convexe inscrit dans le cercle, en joignant les points consécutifs de division (à partir de A) de 1 en 1, et ce par un trait plein.
6. Les élèves construisent ensuite le décagone régulier étoilé inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de A) de 3 en 3, et ce par un trait pointillé.
7. Les élèves identifient la corde AB par la lettre d et la corde AD par la lettre d'
8. Les élèves identifient le point de rencontre des cordes d et d' par la lettre I.

Encore ici, la précision devient une allée de grande classe.

Cette suite de constructions permet d'obtenir la figure suivante.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant pose ensuite diverses questions qui lui permettront de vérifier les connaissances générales des élèves en regard de la géométrie du cercle. En voici une liste non-exhaustive.

- Quel nom donne-t-on au segment AB?
au segment AD?
au segment OA?
au segment AF?
etc.
- Quel nom donne-t-on à la partie du cercle située entre A et B?
Quelle différence y a-t-il entre $\overline{AB}$ et $\widehat{AB}$?
- Quelle est la mesure de la circonférence de ce cercle? (le périmètre).

Quelle est la mesure de la surface de ce disque? (l'aire).

d) etc...

insister sur le symbolisme approprié.

Rappelez les formules usuelles

$$C = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 2: DES TRIANGLES CONGRUENTS

L'enseignant choisit deux triangles congruents sur la figure ci-dessous. L'élève doit vérifier les quatre propriétés de base des polygones congruents.

Ex: les triangles AOB et COD sont-ils congruents?

a) Les mesures des angles:

$$1) \quad m\angle AOB = 36^\circ \text{ et } m\angle COD = 36^\circ$$

$$2) \quad m\angle BAF = \frac{4 \times 36^\circ}{2} = 72^\circ \text{ et}$$

$$m\angle DCH = \frac{4 \times 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

$$3) \quad m\angle GBA = \frac{4 \times 36^\circ}{2} = 72^\circ \text{ et}$$

$$m\angle CDK = \frac{4 \times 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

La mesure d'un angle inscrit, dont le sommet est sur le cercle, est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté par ses côtés.

EXERCICES ET REFERENCES

C'est ce qui a permis de construire le dodécagone régulier

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

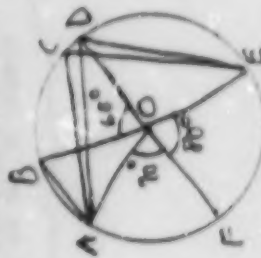
L'enseignant fait vérifier expérimentalement cette dernière conclusion, à l'aide d'un rapporteur d'angle.

(Mesurer d'abord l'angle au centre, puis ensuite l'angle inscrit).

Les élèves peuvent aussi vérifier la congruence des angles à l'aide de rotations et/ou de translations.

Exercices

1) Soit la figure suivante:



Quelle est la mesure de chacun des angles suivants?

- a) $\angle ACE$
- b) $\angle ADF$
- c) $\angle ABE$
- d) $\angle BED$

2) etc...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

On peut aussi vérifier la congruence des angles de ces deux triangles, en utilisant une propriété des triangles isocèles.

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus et inversement

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (ce sont deux rayons)

$$m\angle BAO = m\angle ABO = 36^\circ$$

$$\text{Donc: } m\angle BAO = m\angle ABO = 72^\circ$$

et

$\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (ce sont deux rayons)

$$m\angle DCO = m\angle CDO = \text{et } m\angle CDO = 36^\circ$$

$$\text{Donc: } m\angle DCO = m\angle CDO = 72^\circ$$

b) Les mesures des côtés

① $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ et $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (Ce sont tous des rayons)

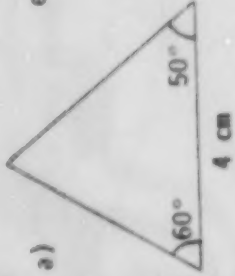
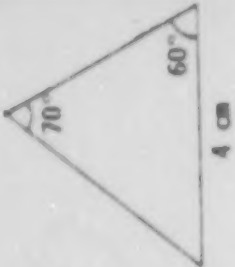
② $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dans un même cercle, des angles au centre congrus interceptent des arcs congrus et des cordes congrues sous-tendent des arcs congrus.

$36^\circ + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ$
car la somme des mesures des
trois angles d'un triangle est
égale à 180°

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 8
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
On peut ainsi faire vérifier cet énoncé en utilisant la fonction sinus. $\sin 18^\circ = \frac{AB}{2r} \quad \text{et} \quad \sin 18^\circ = \frac{CD}{2r}$ Donc: $AB = CD$ c) L'élève calcule le périmètre de chaque triangle $P(\triangle AOB) = AO + BO + AB$ $= 7,5 + 7,5 + 4,635$ $= 19,635$ $P(\triangle COD) = CO + DO + CD$ $= 7,5 + 7,5 + 4,635$ $= 19,635$ d) L'élève calcule l'aire de chaque triangle. $A(\triangle AOB) = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin 36^\circ}{2}$ $= \frac{(7,5) \cdot (7,5) \cdot (0,588)}{2}$ $\approx 16,54$	$AB = 2r \cdot \sin 18^\circ$ $AB = 15 \cdot \sin 18^\circ$ $AB \approx 15 \cdot 0,309$ $AB \approx 4,635$ et $CD \approx 4,635$ $A = \frac{bc \sin A}{2}$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 9
EXERCICES ET REFERENCES	
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE $A(\triangle COD) = \frac{CO \cdot OD \cdot \sin 36^\circ}{2}$ $\approx \frac{(7,5) \cdot (7,5) \cdot (0,588)}{2}$ $\approx 16,54$ e) L'élève vérifie ensuite les quatre propriétés des triangles congruents. - Les angles correspondants sont congruents $\angle AOB \cong \angle COD = 36^\circ$ $\angle BAO \cong \angle DCO = 72^\circ$ $\angle ABO \cong \angle CDO = 72^\circ$ - Les côtés homologues sont congruents $AO \cong CO$, $BO \cong DO$ et $AB \cong CD$ - Les périmètres sont de même mesure $P(\triangle AOB) \approx 19,635$ $P(\triangle COD) \approx 19,635$ - Les aires sont de même mesure $A(\triangle AOB) \approx 16,54$ $A(\triangle COD) \approx 16,54$	

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE : 10
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE EXERCICES ET REFERENCES Exercices 1) Vérifie la congruence des figures suivantes : a)  60° 50° 4 cm et  70° 60° 4 cm b) etc.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 3: DES POLYGONES CONGRUENTS

L'enseignant choisit deux polygones congruents sur la figure construite par les élèves (il peut leur demander d'en trouver) et il leur demande de vérifier les quatre propriétés de base des polygones congruents.

Ex.: les quadrilatères ABCO et HGFO

a) Les mesures des angles

① $m\angle AOC = 72^\circ$ et $m\angle HOF = 72^\circ$

Faire constater aux élèves d titre de rappel, qu'il s'agit de deux angles opposés par le sommet, et qu'à ce titre, ils sont de ce fait congruents.

Faire constater cette congruence par une rotation de l'un des quadrilatères autour du point O.

Donc: $\angle AOC \cong \angle HOF$

② $m\angle BAO = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ et

$m\angle GHO = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$

Donc: $m\angle BAO = m\angle GHO$

... ou les pentagones ABCDO et KHGFO, ou...

Car AF et CH sont deux diamètres

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE : 12
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
③ $m \angle ABC = \frac{288^\circ}{2} = 144^\circ$ et $m \angle HGF = \frac{288^\circ}{2} = 144^\circ$ Donc: $m \angle ABC = m \angle HGF$ ④ $m \angle BCO = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ et $m \angle GFO = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ Donc: $m \angle BCO = m \angle GFO$ Quelle est la somme des mesures des angles de ce quadrilatère? Discuter avec les élèves sur le fait que la somme des mesures des angles d'un polygone égale $180^\circ (n - 2)$, n étant le nombre de côtés du polygone. Faire vérifier ce fait expérimentalement, sur un pentagone, hexagone, octogone, etc.	La mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 13
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Utiliser la subdivision du polygone en triangles pour démontrer ce fait: $180^\circ(n - 2)$ $180^\circ(5 - 2)$ $180^\circ(3)$ 540° b) Les mesures des côtés: ① $AO \cong HO$ (ce sont deux rayons d'un même cercle). ② $AB \cong HG$ (ce sont deux cordes congrues qui sous-tendent deux arcs congrus) ③ $BC \cong GF$ (ce sont deux cordes congrues qui sous-tendent deux arcs congrus) ④ $CO \cong FO$ (ce sont deux rayons d'un même cercle)	

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE : 14
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Faire vérifier la congruence des côtés, à l'aide de translations et de rotations. c) Le périmètre $p(\square ABCO) = OA + AB + BC + CO$ $= 7,5 + AB + BC + 7,5$ $= 15 + 2 AB \quad (\text{car } BC \cong AB)$ $p(\square HGFO) = OH + HG + GF + FO$ $= 7,5 + HG + GF + 7,5$ $= 15 + 2 HG \quad (\text{car } HG \cong GF)$ $= 15 + 2 AB \quad (\text{car } HG \cong AB)$ d) L'aire $A(\square ABCO) = A(\triangle ABO) + A(\triangle BCO)$ $= 2 A(\triangle ABO)$ $A(\square HGFO) = A(\triangle HGO) + A(\triangle GFO)$ $= 2 A(\triangle GFO)$ $= 2 A(\triangle ABO)$ on a déjà montré que les triangles ABO et BCO étaient congruents on a déjà montré que les triangles HGO et GFO étaient congruents	

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 15
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Les élèves effectuent les exercices ci-contre.	<u>Exercices</u> 1) Vérifie, à l'aide des quatre propriétés de base des polygones congruents, que les polygones ABCDO et DEFGO sont congruents. 2) Vérifie, à l'aide des quatre propriétés de base des polygones congruents, que les quadrilatères ADGL et HKBE sont congruents. 3) Identifie une ou plusieurs transformations géométriques qui permettent de vérifier que: a) $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ b) $\triangle CDO \cong \triangle HKO$ c) $\square ABCO \cong \square HGFO$ d) $\square ABCDO \cong \square DEFGC$ e) $\square ADGL \cong \square HKBE$ f) etc...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 16
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE EXERCICES ET REFERENCES 4) Le pentagone régulier étoilé était une marque distinctive des élèves de Pythagore. On peut construire une telle étoile en traçant les diagonales du pentagone régulier convexe correspondant. $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$ Prouve que Quelle est la mesure de AB, si $BC = 2,5$ cm et $AC = 6,5$ cm?	

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	COMPARER sous divers critères (angle, côté, périmètre, aire, etc.) ENONCER les propriétés de similitude, les théorèmes ou les corollaires	PAGE: 17
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE		EXERCICES ET REFERENCES
ACTIVITE 4: LA MESURE DU CÔTÉ D'UN DÉCAGONE RÉGULIER L'enseignant rappelle aux élèves le sens de l'expression «triangles semblables», en insistant sur les quatre propriétés de base des polygones semblables. • Les angles homologues sont congruents. • Les côtés homologues sont proportionnels. • Les périmètres sont proportionnels. • Les aires sont proportionnelles au carré du rapport des périmètres. Ex:		

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$$\textcircled{1} \quad \angle A = \angle D = 37^\circ$$

$$\angle B = \angle E = 53^\circ$$

$$\angle C = \angle F = 90^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle DEF)} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Faire vérifier la congruence des angles, à l'aide de notations et de translations.

Les élèves effectuent les exercices ci-contre:

Exercices

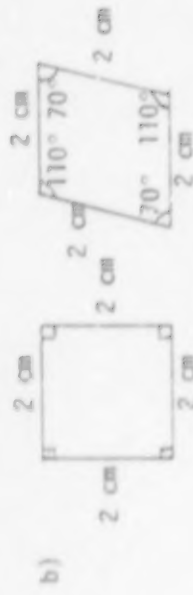
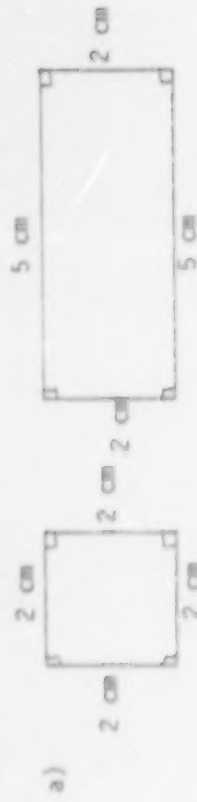
1) Les figures suivantes sont-elles semblables?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Discuter avec les élèves de la similitude des polygones dans les trois cas suivants:



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

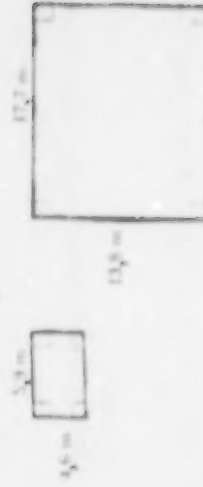
EXERCICES ET REFERENCES

2) Les polygones ci-dessous sont-ils semblables? Pourquoi?

a)



b)



c) etc.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

3) Vrai ou faux? (Explique ta réponse)

a) Tous les triangles équilatéraux sont semblables.

b) Tous les triangles isocèles sont semblables.

c) Tous les rectangles sont semblables.

d) Tous les hexagones réguliers sont semblables.

e) Tous les parallélogrammes sont semblables.

f) Tous les carrés sont semblables.

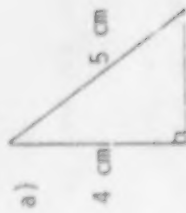
g) Tous les triangles congrus sont semblables.

h) Tous les quadrilatères congrus sont semblables.

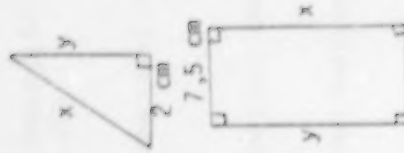
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

4) Dans chaque cas, trouve la valeur de x et y , sachant que les deux figures sont semblables.



c) etc.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant pose la question suivante:

« Dans ton décagone régulier, les triangles OAB, ABI et DOI sont-ils semblables ».

Par équipes de 2, les élèves vérifient les quatre propriétés de base:

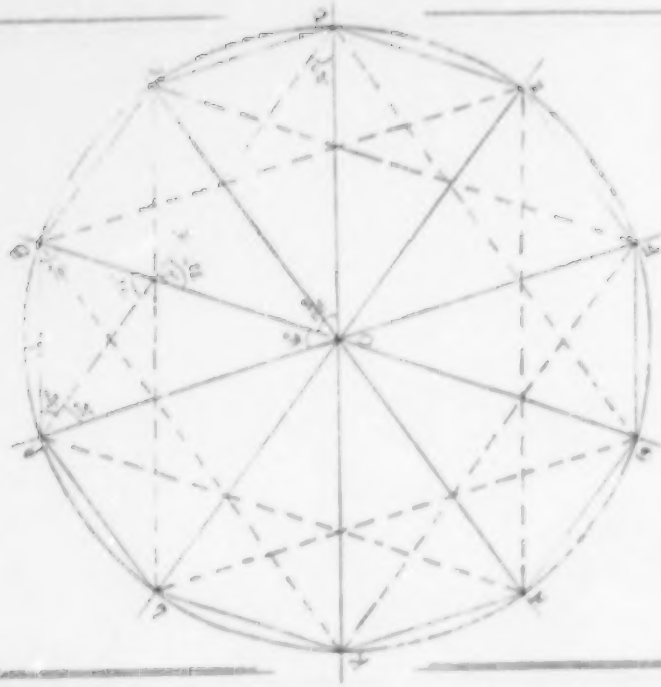
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \angle BOA = 36^\circ \\ & \angle IAB = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ \\ & \angle IOI = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \angle OAB = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ \\ & \angle ABI = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ \end{aligned}$$

$$\angle DOI = 72^\circ$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \angle ABO = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ \\ & \angle BIA = \frac{36^\circ + 108^\circ}{2} = 72^\circ \\ & \angle OID = \frac{108^\circ + 36^\circ}{2} = 72^\circ \end{aligned}$$

Faire vérifier la congruence des angles à l'aide de rotations et de translations.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Des calculs plus savants permettent de vérifier les 3 autres propriétés, mais lorsque les trois angles de deux triangles sont congruents, on dit automatiquement que les deux triangles sont semblables.

Ces autres propriétés peuvent être utiles, lorsque l'on ne connaît pas les mesures des angles.

Donc: les triangles OAB, ABI et DOI sont semblables.

De plus, ils sont isocèles.

Ainsi: $AB = AI = d$

$OD = DI = R$

et

$AD = AI + ID$

$AD = d + R$

$d' = d + R$

$d' - d = R$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant pourrait faire découvrir cette dernière formule aux élèves, en leur demandant d'exprimer la longueur R du rayon en fonction de d et d' , et ce en utilisant des relations dans les triangles OAB , ABI et OAI . Cette dernière démarche demandera plus de temps, mais elle pourra s'avérer plus enrichissante, si les élèves possèdent très bien le concept de triangles semblables.

$$R = d' - d$$

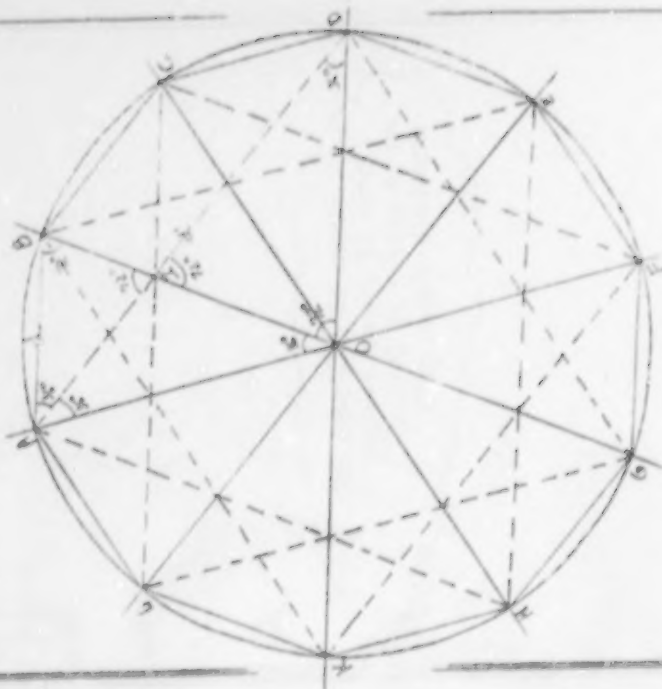
L'enseignant pose cette autre question.

« Dans ton décagone régulier, les triangles AOD et AIO sont-ils semblables ? »

Les élèves vérifient la congruence des angles.

- ① $\angle OAD = \angle OAI = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$
- ② $\angle AOD = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ et $\angle IOA = 36^\circ$
- ③ $\angle AOD = 108^\circ$ et $\angle AIO = \frac{72^\circ + 144^\circ}{2} = 108^\circ$

Faire vérifier cette congruence des angles à l'aide de rotations, de translations et de réflexions.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Donc: les triangles AOO et AIO sont semblables.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi: } \frac{OA}{AI} &= \frac{AO}{OI} \Rightarrow OA^2 = AI \cdot OI \\ OA^2 &= d \cdot d' \\ R^2 &= d \cdot d'\end{aligned}$$

$$R^2 = d \cdot d'$$

L'enseignant pourrait faire découvrir cette dernière formule aux élèves, en leur demandant d'exprimer la longueur R du rayon, en fonction de d et d', et ce en utilisant une proportion dans les triangles semblables AOO et AIO.

Cette dernière démarche demandera plus de temps, mais elle pourra s'avérer plus enrichissante, si les élèves possèdent très bien le concept de triangles semblables.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant fait ensuite effectuer la construction suivante par les élèves.

1. Tracer un cercle de 7,5 cm de diamètre et y indiquer les subdivisions ou points O, L, A et D, aux mêmes endroits que sur la construction du décagone régulier.

2. Tracer les cordes LA(d) et LD(d')

3. Tracer les diamètres LO et NO LLO

4. A l'aide du compas, et en prenant le point L comme centre, tracer, un arc de cercle qui passe par A.

5. A l'aide du compas, et en prenant le point L comme centre, tracer un arc de cercle qui passe par D.

6. Tracer un cercle dont le centre est O' (NO' = O'O), ce cercle coupant le petit arc en Q et le grand arc en S

Les élèves devraient obtenir la construction suivante:

Ces deux arcs de cercle doivent couper le cercle initial de centre O, en deux points distincts.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 29
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Il s'agit maintenant de calculer la longueur du côté du décagone régulier, en fonction du rayon du cercle circonscrit. $AL = LO' = LO' - O'O$ or: $LO'^2 = LO^2 + OO'^2$ $LO'^2 = R^2 + \left(\frac{R^2}{2}\right) = \frac{SR^2}{4}$ $LO' = \sqrt{\frac{SR^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$ (et) $O'O = \frac{R}{2}$ Ainsi: $AL = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$ $AL = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$ Conclusion: Le côté d'un décagone régulier est égal à $\frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$, R étant le rayon du cercle circonscrit.	Relation de Pythagore Ne pas oublier que $AL = d$ $d = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

- 1) Trace un cercle de 10 cm de rayon et montre que le côté du décagone régulier inscrit est approximativement égal à 6,2 cm.
- 2) Trace un cercle de 5 cm de rayon et montre que le côté du décagone régulier inscrit est approximativement égal à 3,1 cm.
- 3) Peut-on affirmer que les deux décagones réguliers précédents sont des polygones semblables? Pourquoi?

Autre question!

«Quelle serait alors la valeur de d' ?»

Les élèves devraient être capables d'effectuer cette déduction simple et le développement algébrique qui en découle.

$$d' = R + d$$

$$d' = R + \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

$$d' = \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

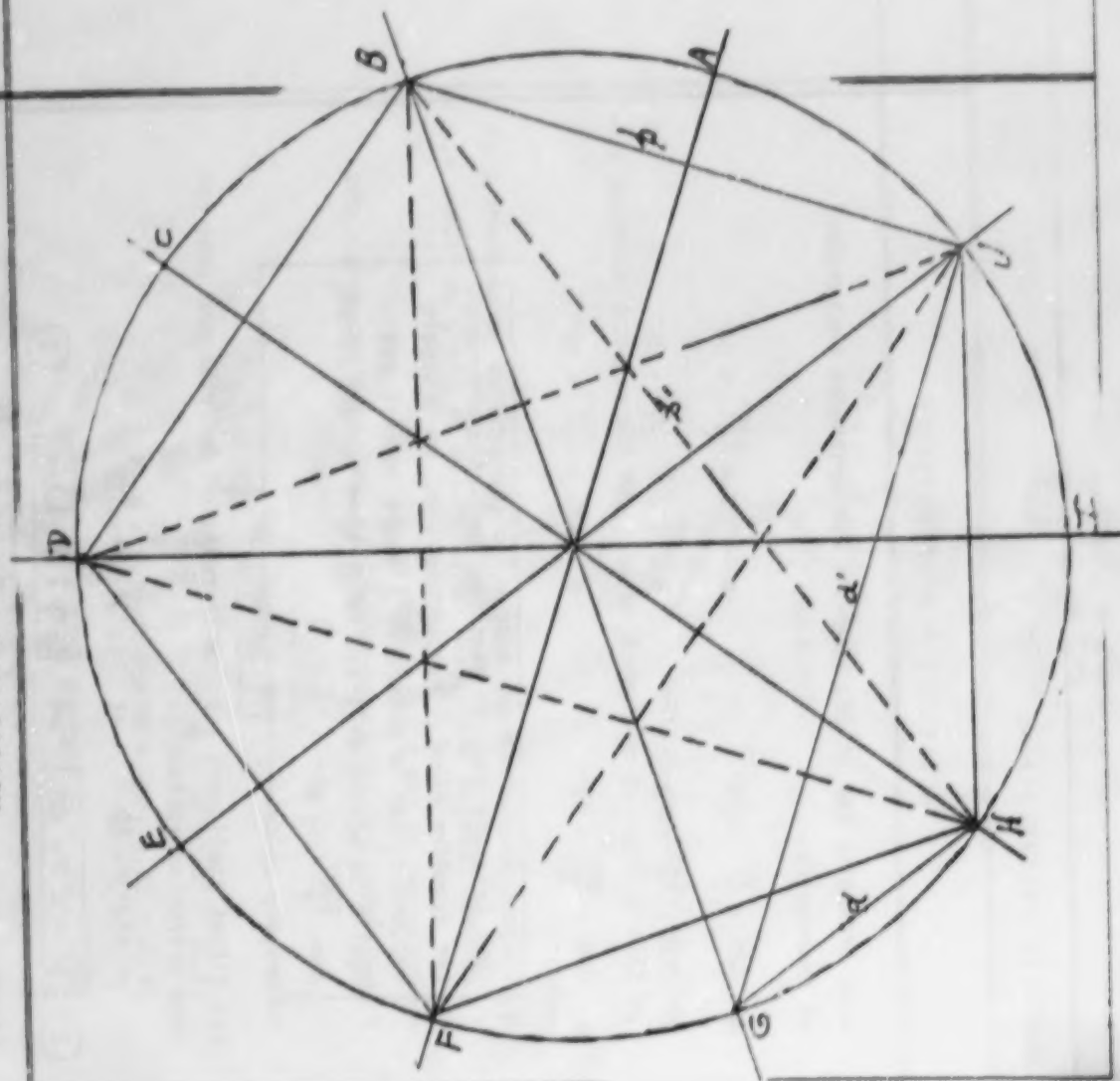
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 21
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
ACTIVITE 5: LA CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE RÉGULIER 1. L'enseignant remet à chaque élève une feuille sur laquelle est tracé un cercle de 7,5 cm de rayon, ou il demande aux élèves de tracer un tel cercle avec leur compas. 2. Les élèves subdivisent ensuite ce cercle en dix arcs congrus (de chacun 36°) à l'aide d'un rapporteur d'angle. 3. Les élèves marquent les points de coupure d'arcs, par les lettres A, B, C, ..., H, I, J, et ils marquent le centre du cercle par la lettre U. 4. Les élèves tracent les rayons OA, OB, OC, ..., OI, OJ, ou les diamètres AF, BG, CH, DI et EJ. <i>Note: l'enseignant devrait posséder une acetate de cette construction afin de vérifier rapidement les constructions des élèves.</i>	<i>Insister sur la précision</i> <i>... dans le sens inverse des aiguilles d'une montre...</i>

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 37
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
5. Les élèves construisent d'abord le pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de B) de 2 en 2, et ce par un trait plein. 6. Les élèves construisent ensuite le pentagone régulier étoilé, inscrit dans le cercle, en joignant les points de division (à partir de B) de 4 en 4, et ce par un trait pointillé. 7. Les élèves identifient la corde GH par la lettre d (côté du décagone convexe) la corde GJ par la lettre d' (côté du décagone étoilé) la corde BJ par la lettre p (côté du pentagone convexe) la corde BH par la lettre p' (côté du pentagone étoilé) Cette suite de constructions permet d'obtenir la figure suivante:	

EXERCICES ET REFERENCES

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

«Les triangles GBH et GBJ sont-ils des triangles rectangles? et Pourquoi?»

$$m \angle GBH = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ \quad m \angle GBJ = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

$$m \angle BGH = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ \quad m \angle BGJ = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$m \angle GHB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \quad m \angle BJG = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Tout triangle inscrit dans une demi-circonférence (le diamètre étant l'hypoténuse), est un triangle rectangle, car la mesure de l'angle inscrit est égal à la moitié de l'arc intercepté par ses côtés, donc $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Les élèves appliquent ensuite la relation de Pythagore dans ces deux triangles rectangles.

$$p^2 + (d')^2 = \overline{GB}^2 \quad \text{et} \quad (p')^2 + d^2 = \overline{GB}^2$$

$$\textcircled{3} \quad p^2 + (d')^2 = 4R^2 \quad \text{et} \quad (p')^2 + d^2 = 4R^2 \quad \textcircled{4}$$

L'élève doit se rappeler que:

$$\textcircled{1} \quad d' - d = R \quad \text{et} \quad R^2 = d \cdot d' \quad \textcircled{2}$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$$(d' - d)^2 = R^2 \longrightarrow \text{à partir de } \textcircled{1}$$

$$(d')^2 - 2d'd + d^2 = R^2 \longrightarrow \text{car } d'd = R^2$$

$$(d')^2 - 2R^2 + d^2 = R^2$$

$$\text{On obtient alors } \textcircled{5} \quad (d')^2 + d^2 = 3R^2$$

L'enseignant insiste fortement sur la compréhension algébrique et graphique de ces 5 relations.

Il demande ensuite aux élèves de se servir de ces 5 relations et d'exprimer successivement p et p' en fonction de la longueur R du rayon.

Ce type d'activité de déduction et d'analyse est une occasion précieuse au travail d'équipe.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Il s'agit d'une addition membre à membre.

$$\begin{aligned}
 p^2 + d^2 &= 4R^2 \\
 -d^2 - d^2 &= -3R^2 \\
 \hline
 p^2 - d^2 &= R^2
 \end{aligned}$$

et

$$p^2 = d^2 + R^2$$

$$\begin{aligned}
 p'^2 + d'^2 &= 4R^2 \\
 -d'^2 - d'^2 &= -3R^2 \\
 \hline
 p'^2 - d'^2 &= R^2
 \end{aligned}$$

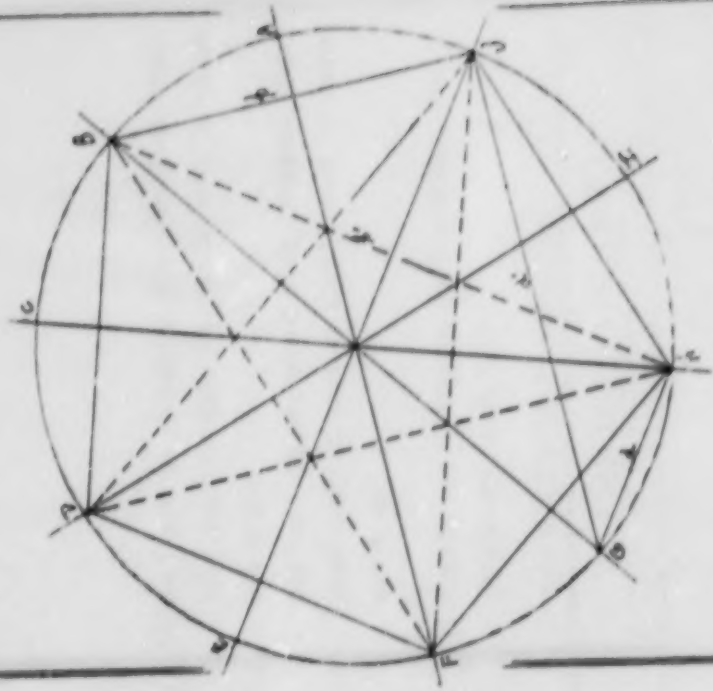
et

$$p'^2 = d'^2 + R^2$$

$$\begin{aligned}
 BJ^2 &= 4R^2 - GJ^2 \\
 p^2 &= 4R^2 - d^2 \\
 p^2 &= 4R^2 - \left(\frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2} \right)^2 \\
 p^2 &= 4R^2 - \frac{R^2(6 + 2\sqrt{5})}{4} \\
 p &= \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BH^2 &= 4R^2 - GH^2 \\
 p'^2 &= 4R^2 - d'^2 \\
 p'^2 &= 4R^2 - \left(\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \right)^2 \\
 p'^2 &= 4R^2 - \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4} \\
 p' &= \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

↗
côté du pentagone régulier



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Dans la figure ci-dessous les droites AB et CD sont parallèles. Montre que les triangles MAB et MCD sont semblables.

Les segments formés par les sécantes qui coupent des parallèles sont partagés en segments proportionnels, et toute parallèle à un côté passant par un point intérieur d'un triangle, détermine un triangle semblable au premier.

Dans les polygones réguliers et semblables, les périmètres sont proportionnels aux rayons des cercles circonscrits et aux apothèmes respectifs.

Le rapport des aires et celui du carré des rayons respectifs forment une proportion.

2) Quel est le périmètre d'un décagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est 4 cm?

Quel est le périmètre d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est 6 cm?

3) Quelle est la mesure de l'apothème dans chacun des deux cas?

Quelle conclusion peux-tu en tirer?

4) Quel est le rapport des aires et celui du carré des rayons dans chacun des deux cas? Quelle conclusion peux-tu en tirer?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

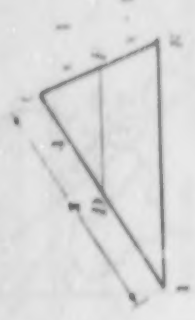
- 1) Dans les figures ci-dessous, $\overline{BC} = 4$ et $\overline{RS} = 7$; si l'aire du polygone $ABCDE$ est de 48, quelle est l'aire du polygone $QRSTU$?



- 2) Dans la figure ci-dessous, quelle est la longueur de $\overline{MJ}$, sachant que $\overline{IN} \parallel \overline{KJS}$? Quel est le périmètre du triangle MNL ?



- 3) Les longueurs des côtés d'un triangle sont 15 cm, 20 cm et 28 cm. Si le côté le plus long d'un triangle semblable mesure 12 cm, quel est le périmètre du

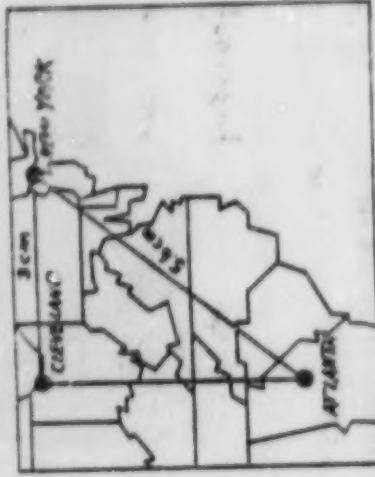
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE : 39
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	triangle le plus petit? 4) Le rapport des côtés. <i>h. m. p. g. m. a.</i> 5 de deux polygones <i>s. m. b. b. l. a.</i> est $\frac{1}{4}$. Quel est le rapport de leurs aires? 5) Quelle est la valeur de x? (DE $\parallel$ AB) a)  b) 

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Problèmes

- 1) Sachant qu'il y a 650 km entre Cleveland et New-York, quelle est la distance entre New-York et Atlanta?



- 2) Utilise le concept de triangles semblables pour trouver la largeur AB qui traverse cette rivière.



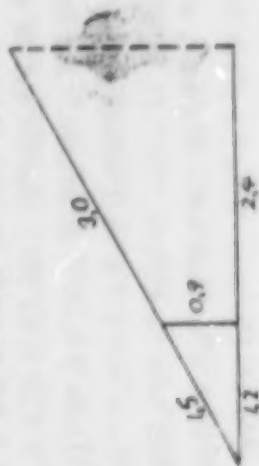
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

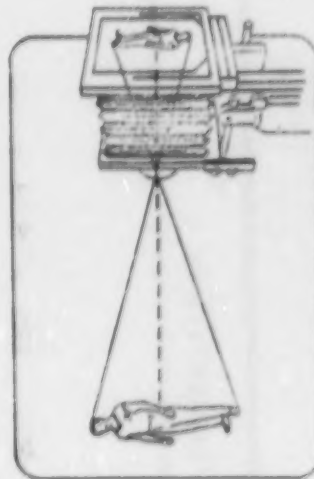
- 3) Deux jardins ont la forme de triangles semblables. Le périmètre du plus grand est de 10,5 m et celui du petit est de 5,6 m. Si $\overline{BC}$ mesure 3,6 m, quelle est alors la mesure de $\overline{EF}$?



- 4) Quelle est la longueur de ce lac?



- 5) Une personne est située à 300 cm d'une lentille de caméra et le film est situé à une distance de 1,3 cm de la lentille. Si la personne mesure 180 cm de haut, quelle est sa hauteur sur l'image du film?

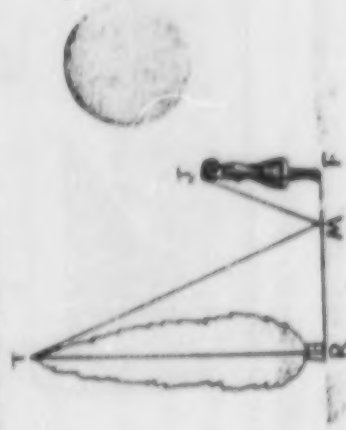


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

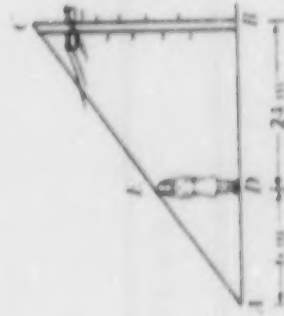
EXERCICES ET REFERENCES

6) Louise a décidé de mesurer la hauteur d'un arbre en plaçant un miroir sur le sol entre elle et l'arbre. Elle se place à l'endroit d'où elle peut voir le sommet de l'arbre dans le miroir.

Le miroir est à 3 m de l'arbre et Louise est située à 0,25 m du miroir. Ses yeux sont à 1,52 m du sol. Quelle est la hauteur de cet arbre?



7) Pour trouver la hauteur d'un poteau téléphonique, une jeune fille qui mesure 1,6 m se tient debout à un endroit où sa tête touche au fil de soutien. Elle est située à 6 m de l'endroit où le fil est retenu au sol et à 24 m du poteau téléphonique. Quelle est la hauteur de ce poteau?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

- 8) Au moment où une personne de 1,8 m projette une ombre de 2,4 m de long, une fusée située à proximité projette une ombre de 48 m de long. Quelle est la hauteur de cette fusée?



- 9) Lors d'une éclipse solaire totale, la lune obstrue totalement le rayon du soleil, lorsqu'on est situé en un point P sur la terre. Les distances approximatives entre la terre et la lune et entre la terre et le soleil sont de 380 000 km et 140 000 000 km ($\approx$), quel est le diamètre approximatif du soleil?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

10) Un homme, dont les yeux sont situés à 2 m du sol, a remarqué qu'il peut voir le sommet d'un arbre juste au-dessus d'un porte-chapeau. Si ce porte-chapeau mesure 11 m de haut et si cet homme est situé à 18 m du porte-chapeau et à 30 m de l'arbre, quelle est la hauteur de cet arbre?



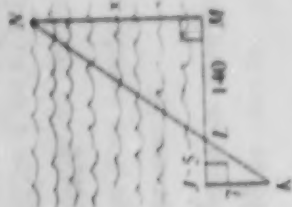
11) Assis à 3 m de la fenêtre de sa chambre, Louis peut juste voir le sommet et la base d'un lampadaire. Si la hauteur de la fenêtre est de 2 m et si la fenêtre est située à 9 m du lampadaire, quelle est la hauteur de ce lampadaire?



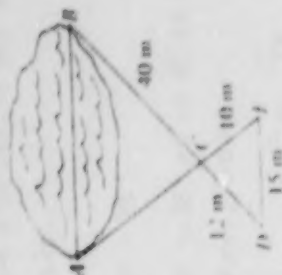
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

12) Quelle est la largeur de la rivière?



13) Quelle est la largeur de cet étang?



14) etc...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

RAPPEL DE DIFFÉRENTES NOTIONS EN REGARD DU CERCLE

- rayon
- corde
- diamètre
- tangente
- point de tangence
- sécante
- régions d'un cercle (intérieur, extérieur, cercle)
- tangente commune à 2 cercles (interne et externe)
- angle au centre
- mesure d'angle du centre
- arc (mineur et majeur) $\widehat{APB}$
- mesure d'arc (vs mesure d'angle au centre)
- cercles congruents (ils ont même rayon)
- cercles concentriques.

EXERCICES ET REFERENCES

Exercises

1) Identifie:

- a) le centre
- b) 3 rayons
- c) un diamètre
- d) une corde
- e) une tangente
- f) une sécante



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

2) Vrai ou faux?

- a) le diamètre d'un cercle est la plus longue corde du cercle.
 b) le rayon d'un cercle est aussi une corde du cercle.
 c) une corde d'un cercle est aussi une sécante de ce cercle.
 d) une sécante d'un cercle est toujours un diamètre de ce cercle.
 e) un rayon d'un cercle est aussi tangent au cercle.

3) Si $m\angle MPX = 28^\circ$

m. $\angle ZPY = 38^\circ$ et si $\overline{WZ}$ et $\overline{XV}$ sont des diamètres, trouve:

- a) $m\widehat{YZ}$ h) $m\widehat{ZXW}$
 b) $m\widehat{WX}$ i) m. $\angle XPY$
 c) m. $\angle VPZ$ j) $m\widehat{XV}$
 d) $m\widehat{VZ}$ k) etc...
 e) $m\widehat{VWX}$
 f) $m\widehat{ZVW}$
 g) $m\widehat{WYZ}$



OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

4) Vrai ou faux?

a) Si $\widehat{AB} = 32^\circ$ et $\widehat{XY} = 32^\circ$, alors $\widehat{AB} \cong \widehat{XY}$.

b) Deux cercles congrus ont des rayons congrus.

c) Deux cercles concentriques n'ont jamais de rayons congrus.

d) Tous les rayons d'un même cercle sont congrus.

e) Si deux angles au centre sont congrus, alors leurs arcs mineurs correspondants sont congrus.

5) Si $\widehat{SAR} = 32^\circ$ et $\widehat{RAW} = 112^\circ$,

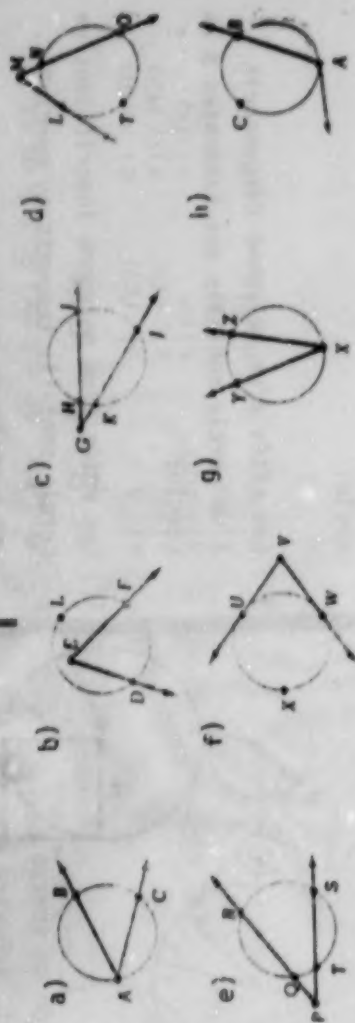
Trouve:

a) $\widehat{SR}$ b) $\widehat{TX}$ c) $\widehat{XQ}$ d) $\widehat{WR}$ e) $\widehat{SW}$ f) $\widehat{TQ}$ g) $\widehat{TYX}$ h) $\widehat{S/W}$ 

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

6) Quels angles sont des angles inscrits?



7) Quelle est la mesure de chaque angle?
 $(\overline{AB} \parallel \overline{DC}, m\angle B = 94^\circ \text{ et } m\angle AXB = 104^\circ)$



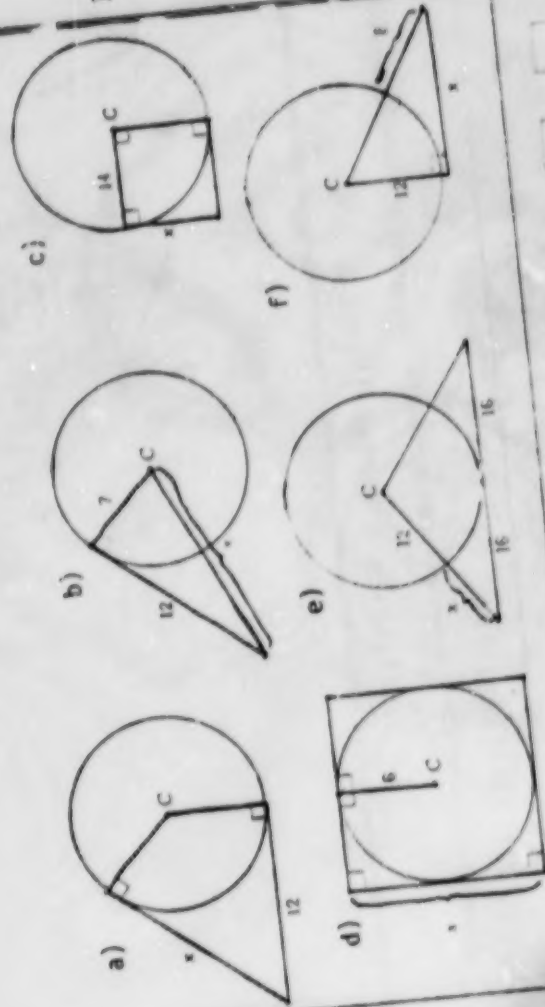
- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) $\angle A$ | b) $\angle B$ | c) $\angle C$ | d) $\angle D$ |
| e) $\angle AXC$ | f) $\angle BDX$ | g) $\angle AXB$ | h) $\angle CXD$ |
| i) $\angle BAC$ | j) $\angle ABD$ | k) $\angle ACD$ | l) $\angle BDC$ |
| m) $\angle CAD$ | n) $\angle CBD$ | o) $\angle ADB$ | p) $\angle BAC$ |

EXERCICES ET REFERENCES

- 8) Combien peut-on tracer de tangentes à un cercle à partir d'un point extérieur à ce cercle?
- 9) Combien peut-on tracer de tangentes à un cercle à partir d'un point intérieur à ce cercle?
- 10) Combien peut-on tracer de tangentes à un cercle à partir d'un point pris sur ce cercle?
- 11) Les côtés d'un polygone circonscrit à un cercle sont-ils des tangentes à ce cercle?

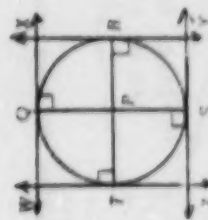
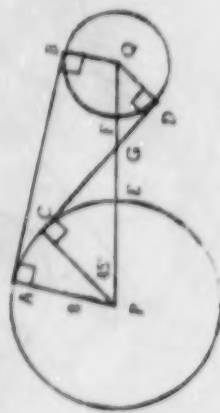
- 12) Les côtés d'un polygone inscrit dans un cercle sont-ils tangents au cercle?

- 13) Dans chaque cas, quelle est la valeur de x ?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$\odot P$ signifie «cercle de centre P»!



EXERCICES ET REFERENCES

14) Dans cette figure, les segments AB et CD sont tangents aux $\odot P$ et $\odot Q$.

De plus, $\overline{AP} = 8$ cm, $\overline{BQ} = 5$ cm et

$m\angle CPE = 45^\circ$. Trouve:

- | | | |
|-------------------|-----------------|-----------------|
| a) $\widehat{CQ}$ | b) $\angle PQC$ | c) $\angle CGP$ |
| d) $\angle CG$ | e) $\angle QDC$ | f) $\angle FGD$ |
| g) $\angle FQD$ | h) $\angle DF$ | i) $\angle DQ$ |
| j) $\angle DC$ | k) $\angle DC$ | l) $\angle FG$ |
| m) $\angle GQ$ | n) $\angle PQ$ | o) $\angle AR$ |

15) Dans cette figure, les droites WX, XY, YZ et ZW sont tangentes au $\odot P$, $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ et $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$

De plus, $\overline{WT} = \overline{TP}$

Prouve que le quadrilatère WXYZ est un rectangle.

16) Si un hexagone peut à la fois être inscrit et circonscrit à deux cercles concentriques, alors cet hexagone est régulier. Prouve cet énoncé.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

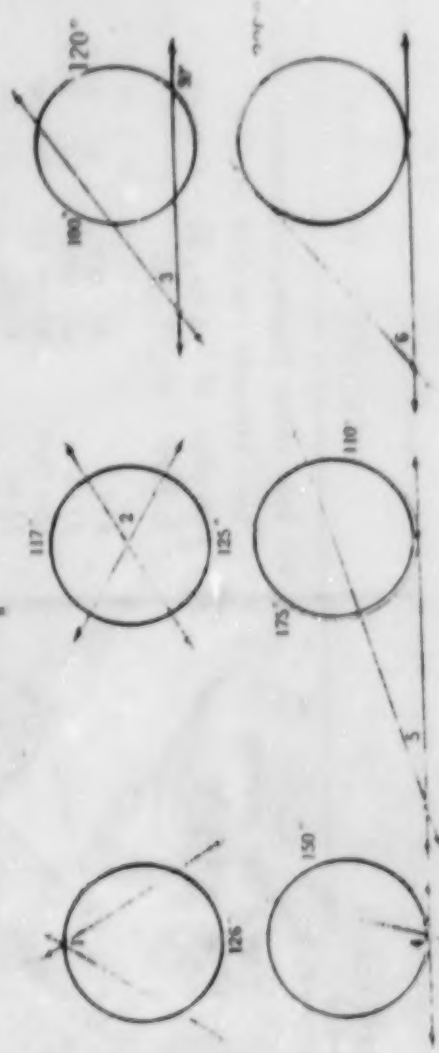
AUTRES RAPPELS

- la mesure d'angles
- la mesure d'angles au centre
- la mesure d'arcs
- la mesure d'angles inscrits
- la mesure d'angles intérieurs
- la mesure d'angles extérieurs
- les mesures relatives à la rencontre de deux cordes d'un même cercle.

Utiliser les coupures de sécantes

Exercices

- 1) Trouve la mesure en degrés des angles 1 à 6.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

2) Dans cette figure, $m\widehat{BC} = 84^\circ$

$$m\widehat{CD} = 38^\circ$$

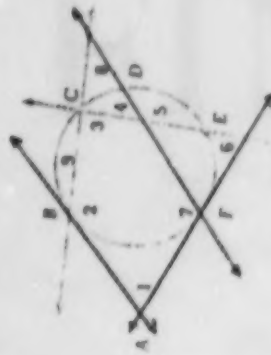
$$m\widehat{DE} = 64^\circ$$

$$m\widehat{EF} = 60^\circ \text{ et}$$

la droite AB et AF sont tangentes au cercle.

Trouve:

- | | | |
|--------------------|--------------------|----------------|
| a) $m\widehat{BF}$ | b) $m\widehat{BD}$ | c) $m\angle 1$ |
| d) $m\widehat{BC}$ | e) $m\angle 2$ | f) $m\angle 3$ |
| g) $m\widehat{CE}$ | h) $m\angle 4$ | i) $m\angle 5$ |
| j) $m\angle 6$ | k) $m\widehat{DE}$ | l) $m\angle 7$ |
| m) $m\widehat{EF}$ | n) $m\angle 8$ | o) $m\angle 9$ |



3) Dans cette figure, $m\angle 1 = 2x$

$$m\angle 2 = 2x$$

$$m\widehat{RY} = 4x - 4$$

$$m\widehat{YT} = 3x - 20$$

$$m\angle 4 = 3x + 14 \text{ et}$$

ST et SR sont des droites tangentes du cercle.

Trouve:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) la valeur de x | b) $m\angle 1$ |
| c) $m\angle 2$ | d) $m\widehat{RYT}$ |
| e) $m\widehat{YT}$ | f) $m\widehat{YR}$ |
| g) $m\widehat{TW}$ | h) $m\widehat{RW}$ |
| i) $m\angle 4$ | j) $m\widehat{TVW}$ |
| k) $m\widehat{VW}$ | l) $m\angle 3$ |
| m) $m\widehat{TRV}$ | n) $m\widehat{RV}$ |
| o) $m\angle 5$ | p) $m\widehat{YV}$ |
| q) $m\angle 6$ | r) $m\angle 7$ |



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 54
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES 4) Prouve les énoncés suivants: a) Si une sécante et une tangente se rencontrent à l'extérieur d'un cercle, alors la mesure de l'angle formé est égale à la demi-mesure de la différence positive des mesures des arcs interceptés. b) Si deux tangentes se rencontrent à l'extérieur d'un cercle, alors la mesure de l'angle formé est égale à la demi-mesure de la différence positive des mesures des arcs interceptés. 5) Si deux cordes se coupent dans un même cercle, alors le produit des mesures des segments d'une corde est égal au produit des mesures des segments de l'autre corde. $AE \cdot EC = BE \cdot ED$ A l'aide du concept de triangles semblables, prouve cet énoncé.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

6) Si deux sécantes coupent un cercle à partir d'un point extérieur au cercle, alors le produit des mesures de la partie extérieure (au cercle) de la sécante et de la sécante elle-même est égal au produit des mesures de la partie extérieure (au cercle) de l'autre sécante et de l'autre sécante elle-même.

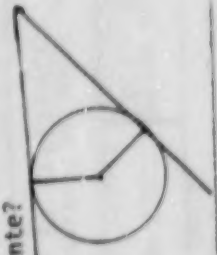
$$RQ \cdot RP = RS \cdot RT$$

Prouve cet énoncé.

7) Qu'arrive-t-il à l'énoncé précédent, si on a la figure suivante:



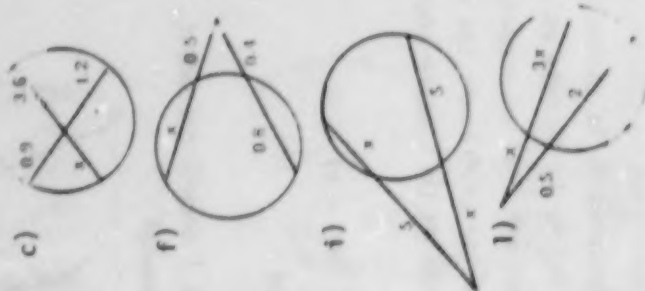
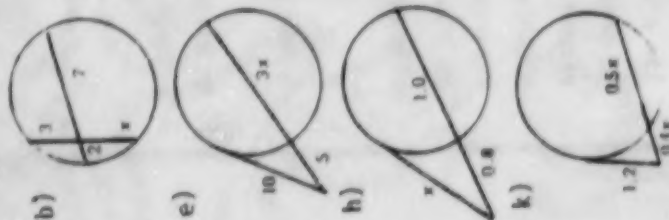
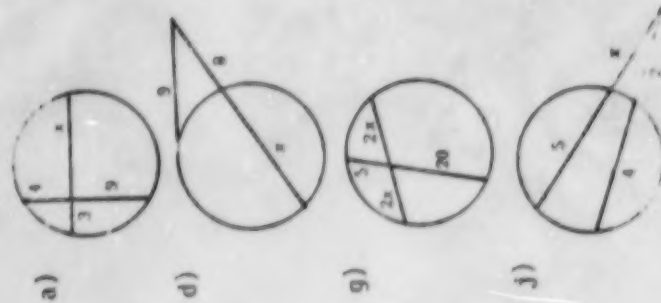
8) Qu'arrive-t-il à ce même énoncé si on a la figure suivante?



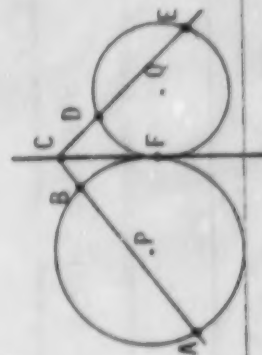
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

9) Dans chaque cas, quelle est la valeur de x . (On assure que les segments qui ont l'arc de tangentes sont bien des tangentes)



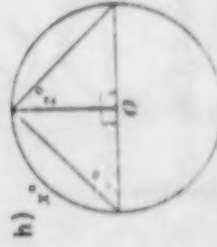
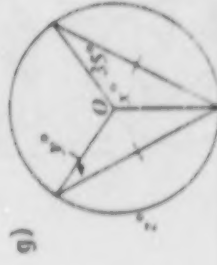
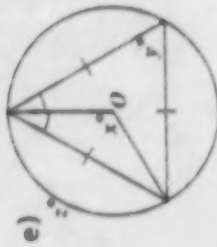
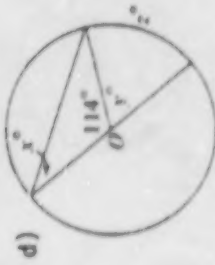
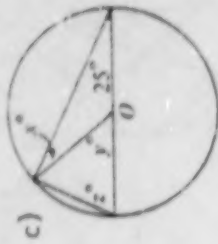
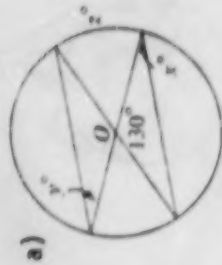
10) Dans la figure ci-contre, CF est une droite tangente au $\odot P$ et au $\odot Q$ en F.
Prouve que $CA - CB = CE - CD$



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

11) Dans chaque figure, quelle est la valeur de x , y et z ?

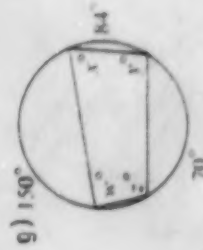
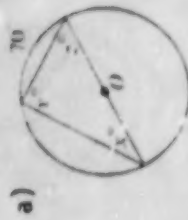


12) La somme des mesures d'un angle inscrit et d'un angle au centre interceptant le même arc, est de 225° . Quelle est la mesure de chaque angle?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

13) Quelle est la valeur de chaque variable?



14) Un trapèze ABCD est inscrit dans un cercle:
cle:

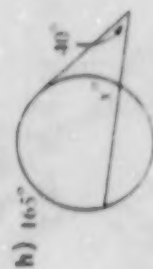
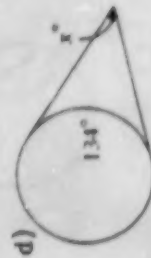
Si $\widehat{BC} = 62^\circ$ et $m\widehat{DC} = 98^\circ$, quelle est la mesure des 4 angles de ce trapèze?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

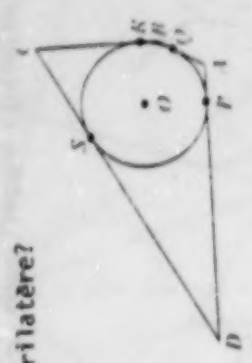
16) Quelle est la mesure de l'angle aigu formé par une tangente et une corde, si le rapport des mesures des deux arcs interceptés par la corde est de $\frac{4}{5}$?

17) Dans chaque cas, trouve la valeur de x .



18) D'un point extérieur à un cercle, on trace deux tangentes perpendiculaires. Quelle est la mesure des arcs interceptés?

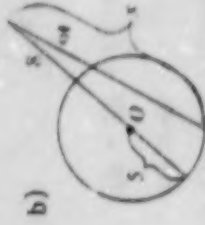
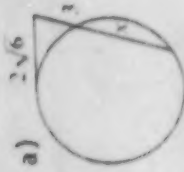
19) $\overline{QR}$ et $\overline{QS}$ sont tangentes au $\odot O$ respectivement en R et S. Si $m\angle Q = 100^\circ$, quelle est la mesure de $\angle ROS$?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 61
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	20) Sur la figure, le quadrilatère ABCD est circonscrit au $\odot O$, et $\frac{m \widehat{PQ}}{m \widehat{QR}} = \frac{2}{1} \text{ et } \frac{m \widehat{RS}}{m \widehat{SP}} = \frac{4}{5}$ Quelle est la mesure de chaque angle de ce quadrilatère?  21) Dans la figure ci-dessous, peut-on affirmer que: $CB \cdot AD + CA \cdot BD = CD \cdot AB ?$ Prouve cet énoncé, s'il est vrai?  22) Quelle est la valeur de x, dans chaque cas? 

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

23) Quelle est la valeur de x dans chaque cas?



24) ABCD est un quadrilatère circonscrit;

$$\overline{CR} = 2, \overline{BR} = 3, \overline{AQ} = 6 \text{ et } \overline{DS} = 4.$$

a) Quel est le périmètre de ABCD?

b) Prouve que $AB + CD = AD + BC$

25) etc.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle. ENONCER les règles	PAGE: 63
	INTERVENANT dans des problèmes impliquant des relations métriques dans un cercle.	
	EXERCICES ET REFERENCES	

ACTIVITE 6: DES RELATIONS METRIQUES DANS LE CERCLE

En utilisant le décagone régulier et le pentagone régulier inscrit dans le cercle de 7,5 cm, l'enseignant fait constater et démontrer différents théorèmes ou corollaires s'appliquant au cercle.

- 1 Deux cordes d'un cercle, situées à une même distance du centre, sont congruentes.

Dans le pentagone régulier, l'élève appelle M, le point de rencontre de HC et DB et S le point de rencontre de EJ et FD

a) $m\angle MOD = 36^\circ$ et $\sin 36^\circ = \frac{DM}{OD}$

$\sin 36^\circ = \frac{DM}{7,5}$

$DM = 4,41$ cm et $EB = 8,82$ cm

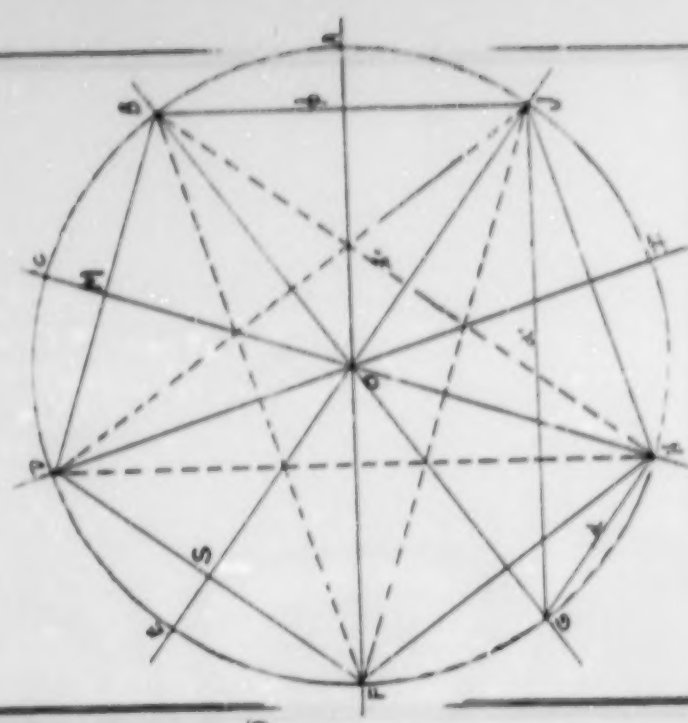
$OM^2 = OD^2 - DM^2 \Rightarrow OM = 6,07$ cm

b) $m\angle OSD = 36^\circ$ et $\sin 36^\circ = \frac{DS}{OS}$

$\sin 36^\circ = \frac{DS}{7,5}$

$DS = 4,41$ cm et $DF = 8,82$ cm

$OS^2 = OD^2 - DS^2 \Rightarrow OS = 6,07$ cm



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 64
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
② Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage celle-ci en deux segments congruents. Dans le pentagone régulier, on sait que $\overline{OM} \perp \overline{DB}$, par construction. Si $\overline{OM} \perp \overline{DB}$, on a vu que $\overline{DM} \cong 4,41$ et on peut de la même manière montrer que $\overline{MB} \cong 4,41$. Faire vérifier cette congruence à l'aide d'une translation. ③ Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs congruents. Dans le pentagone régulier, on sait que par construction du pentagone régulier que $m \angle DOC = 36^\circ$ et $m \angle BOC = 36^\circ$ On sait aussi par construction que $\overline{OC} \perp \overline{DB}$ Alors, $m \widehat{DC} = m \widehat{CB}$ Pour s'en assurer, on pourrait en calculer la longueur exacte par la formule $C = 2\pi r$	

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 65
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
$\widehat{DC} = \frac{C}{10} = \frac{2\pi r}{10} = \frac{\pi r}{5} \approx 4,71 \text{ cm}$ $\widehat{GH} = \frac{C}{10} = \frac{2\pi r}{10} = \frac{\pi r}{5} \approx 4,71 \text{ cm}$ Faire vérifier cette congruence à l'aide d'une rotation de centre O. ④ Dans un cercle, des arcs congruents déterminent des cordes congruentes et réciproquement. Dans le décagone régulier, comme dans le pentagone régulier, on sait que: $\widehat{GI} = 4,71 \text{ cm}$ et $d = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$ [Dans le pentagone régulier] $d \approx 4,64 \text{ cm}$ $\widehat{AB} = 4,71 \text{ cm}$ et $d = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$ [Dans le décagone régulier] $d \approx 4,64 \text{ cm}$ Faire vérifier ces congruences à l'aide de rotations de centre O.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- 5 Les arcs compris entre deux cordes parallèles sont congruents. Dans le décagone régulier, on voit que le quadrilatère KBCH dans lequel

$$m\angle KHC = m\angle BCH = 72^\circ$$

$$m\angle HKB = m\angle CBK = 108^\circ$$

Donc $\overline{KB} \parallel \overline{HC}$, et le quadrilatère KBCH est un trapèze.

$$\text{Ainsi: } m\widehat{KH} = m\widehat{BC} = 36^\circ$$

(ce que l'on savait déjà)

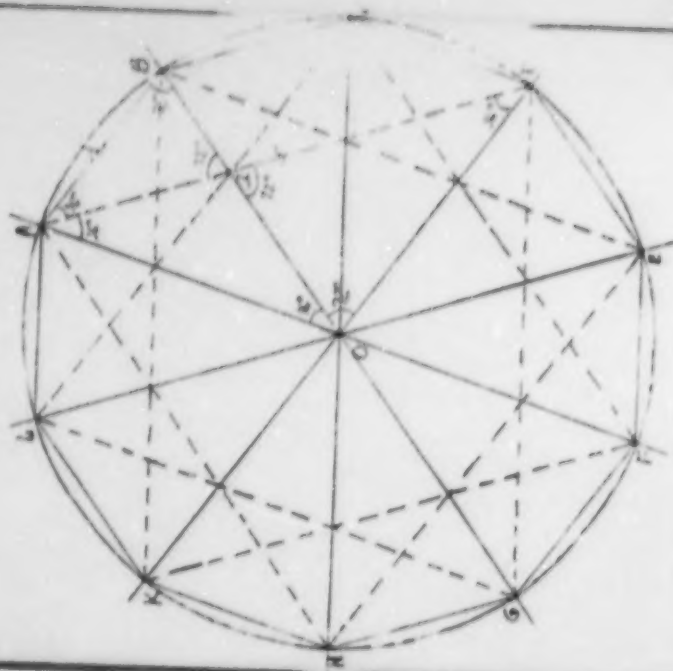
Faire vérifier cette congruence à l'aide d'une rotation de centre O

- 6 La mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté.

Dans le décagone régulier, on a vu que:

$$m\angle ABI = \frac{m\widehat{AC}}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

Faire vérifier ces mesures à l'aide du rapporteur d'angle.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

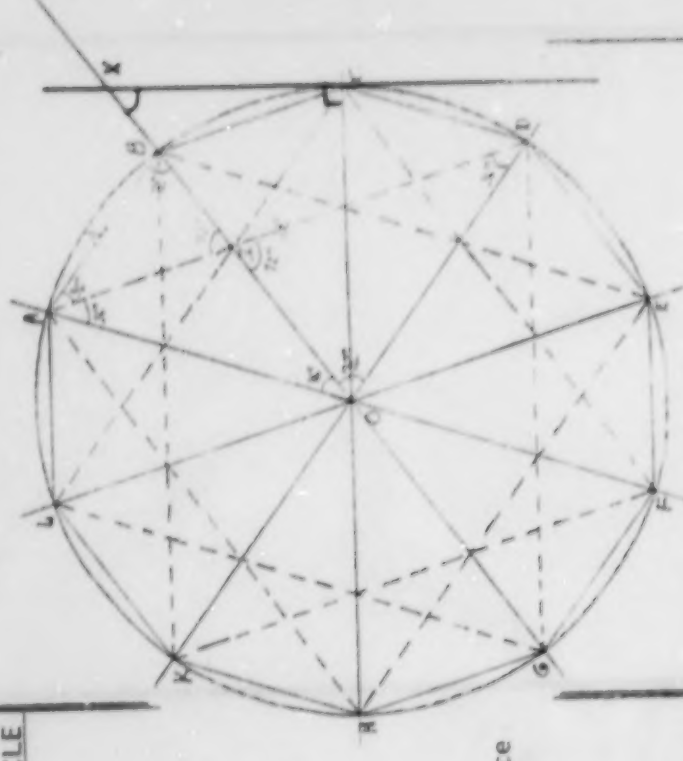
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- ⑦ La mesure d'un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et de leurs prolongements.

Dans le décagone régulier, on a vu que:

$$m\angle AIB = \frac{m\widehat{AB} + m\widehat{GD}}{2} = \frac{36^\circ + 108^\circ}{2} = 72^\circ$$

Faire vérifier ces mesures à l'aide du rapporteur d'angle.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 6P
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
ACTIVITE 7: D'AUTRES RELATIONS METRIQUES DANS LE CERCLE Les élèves utilisent leur décagone régulier et prolongent le rayon OB. Ils tracent ensuite une droite XC perpendiculaire au rayon OC, passant par le point C. Le point X est le point de rencontre de XC et du prolongement de OB. 1 La mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle est égale à la valeur absolue de la demi-différence des mesures en degrés des arcs interceptés par ses côtés. On sait que: $m\angle OXC = 54^\circ,$ $\text{car } m\angle OCX = 90^\circ \text{ et } m\angle COX = 36^\circ$ $\text{Or: } m\angle OXC = \frac{m\widehat{GC} - m\widehat{BC}}{2} = \frac{144^\circ - 36^\circ}{2} = 54^\circ$ Faire vérifier ces mesures à l'aide du rapporteur d'angles.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

- (2) Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence.

La droite XC est tangente au cercle, car elle ne touche qu'à un point du cercle, soit le point de tangence C.

Comme ce point de tangence C est l'extrémité du rayon OC, la droite XC est perpendiculaire au rayon OC.

On sait aussi que:

$$\angle OXC = 54^\circ \text{ et } \angle COX = 36^\circ$$

$$\text{donc } \angle XCO = 90^\circ \text{ et } XC \perp OC$$

Faire vérifier cette perpendicularité à l'aide d'une équerre ou du rapporteur d'angle.

NOTE: L'étude de ces relations vise à permettre aux élèves d'avoir une meilleure perception des différents éléments et des différentes relations à l'intérieur d'un cercle. Il est important que l'élève comprenne ces diverses relations et qu'il puisse les intégrer parfaitement.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Problèmes

- 1) Une corde d'un cercle mesure 24 cm et est située à 9 cm du centre de ce cercle. Quel est le rayon de ce cercle?
- 2) Le diamètre d'un cercle est de 20 cm et une corde de ce cercle mesure 16 cm. A quelle distance du centre de ce cercle est située cette corde?
- 3) Vrai ou Faux et pourquoi?
 - a) Si deux cordes d'un cercle sont congrues alors leurs arcs correspondants sont congrus.
 - b) Si un rayon d'un cercle divise un arc donné en deux arcs congrus, alors il divise aussi la corde correspondante en deux segments congrus.
 - c) Dans un cercle, si une corde perpendiculaire à une autre, divise cette corde en deux segments congrus, alors cette première corde est un diamètre.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

d) Si deux cordes d'un cercle sont situées à la même distance du centre de ce cercle, alors ces deux cordes sont congrues.

e) Dans un cercle, si une corde est plus longue qu'une autre alors cette corde est située plus près du centre du cercle.

4) Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de 12 cm, quelle est la longueur de chaque côté de l'hexagone? A quelle distance du centre est situé chaque côté de l'hexagone?



5) Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de 12 cm, quelle est la longueur de chaque côté du triangle? A quelle distance du centre est situé chaque côté?

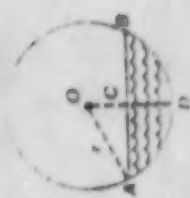


6) Une chèvre est attachée au coin d'une étable de 10 m sur 20 m. Si la corde mesure 25 m de long, trouve l'aire de la région que la chèvre peut brouter.

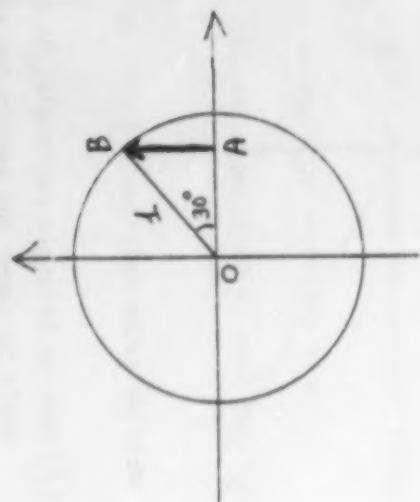
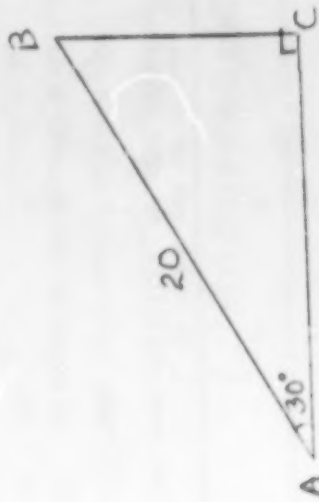
OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES



7) La figure ci-contre montre une section horizontale d'une conduite d'eau. L'eau dans la conduite a une profondeur de 18 cm au milieu de la section. La longueur de la surface de l'eau est de 40 cm. Quelle est le rayon de la conduite d'eau?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	ENONCER les règles intervenant dans des problèmes impliquant des relations métriques relatives à la hauteur dans un triangle rectangle.	PAGE: 73
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES	
<u>ACTIVITE 8: DES RELATIONS METRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE</u> A)  On sait que AB correspond au sinus de l'angle BOA, soit $\sin 30^\circ$. Or: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ <i>Faire remarquer aux élèves qu'il s'agit de la moitié de l'hypoténuse.</i>	B)  $\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB}$ $\sin 30^\circ = \frac{BC}{20}$ $BC = 20 \cdot \sin 30^\circ$ $BC = 20 \cdot \frac{1}{2}$ $BC = 10$	

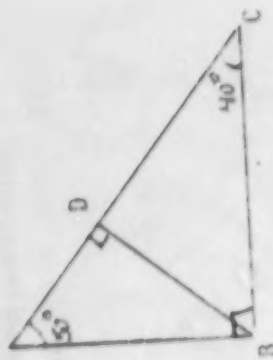
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE : 74
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE De ces deux activités, on peut déduire la relation suivante: ① Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse. De plus, les élèves connaissent déjà la relation de Pythagore.  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ Faire vérifier cette relation à l'aide de la règle. ② Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés de l'angle droit.	EXERCICES ET REFERENCES

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

D'autres relations importantes peuvent être dégagées, à partir du concept de triangles semblables.



L'enseignant pose la question suivante:

«Les triangles ABC, ABD et BCD sont-ils semblables?»

Les élèves essaient de démontrer ce fait en vérifiant si les trois angles des triangles sont congrus.

$\triangle ABC$

m $\angle A$	$= 50^\circ$
m $\angle B$	$= 90^\circ$
m $\angle C$	$= 40^\circ$

$\triangle ABD$

m $\angle A$	$= 50^\circ$
m $\angle B$	$= 90^\circ$
m $\angle D$	$= 40^\circ$

$\triangle BCD$

m $\angle B$	$= 90^\circ$
m $\angle C$	$= 40^\circ$
m $\angle D$	$= 50^\circ$

La somme des trois angles doit être égale à 180°

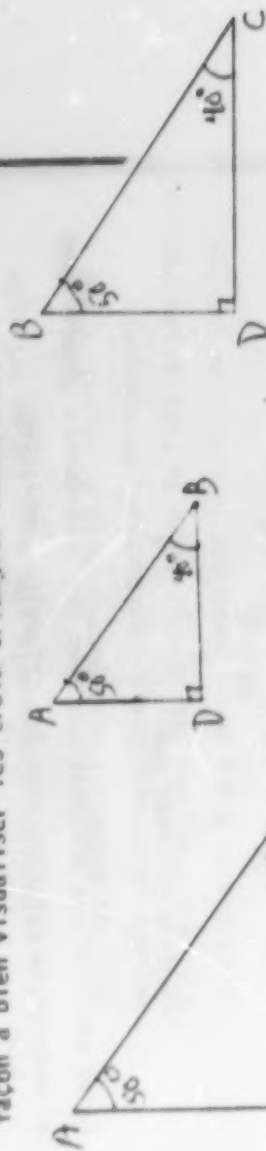
Les trois triangles sont alors semblables!

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 76
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE De cette activité, on peut déduire que: ③ Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine des triangles semblables au premier. Faire vérifier la congruence des angles à l'aide de rotations et de translations. L'enseignant rappelle aux élèves les différentes notions relatives aux rapports et proportions. - rapport - proportion - moyens - extrêmes - 4e proportionnelle - moyenne proportionnelle	EXERCICES ET REFERENCES Exercices sur les rapports et proportions

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant utilise le triangle précédent et il le décompose de façon à bien visualiser les trois triangles semblables.



(ne pas oublier que DB est la hauteur relative à l'hypoténuse)

peut-on affirmer que

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{AD}$$

$$DB^2 = DC \cdot AD$$

Certainement! car les deux triangles sont semblables.

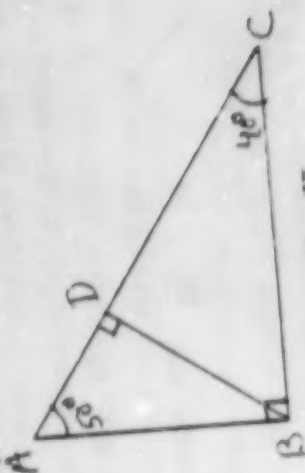
Faire vérifier cette égalité avec les instruments géométriques, et ce sur de grandes figures.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- ④ Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



«Peut-on affirmer que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$? »

«Peut-on affirmer que $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$? »

Faire vérifier ces affirmations avec les instruments géométriques et montrer la relation avec les triangles semblables.

- ⑤ Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

Exercices sur les relations

ACTIVITE 9: AUTRES CONSTRUCTIONS RELATIVES AU CERCLE

① La construction d'un cercle circonscrit à un triangle
Avec les élèves, l'enseignant essaie de découvrir une méthode permettant cette construction, en suggérant s'il y a lieu, aux élèves d'utiliser le fait qu'une perpendiculaire à une corde passe par le centre du cercle.

a) Construire d'abord des perpendiculaires élevées sur le milieu de deux côtés du triangle.



b) Marquer le point d'intersection de deux perpendiculaires, par la lettre O.



c) Tracer le cercle, dont le rayon est OA (ou OB ou OC).

② La construction d'un cercle inscrit dans un triangle.

La clef de cette construction est la détermination du centre du cercle par la rencontre de deux bissectrices d'angles du triangle. Encore ici, c'est une excellente occasion pour une activité de découverte.

a) Construire les bissectrices de deux angles du triangle. Le point de rencontre est le point O , qui est le centre du cercle.

b) Construire une perpendiculaire $\overline{OP}$ à l'un des côtés du triangle, le point P étant un point de tangence; $\overline{OP}$ est alors le rayon du cercle.

c) Tracer le cercle, dont le rayon est $\overline{OP}$.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE ACTIVITES D'ENRICHISSEMENT

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- ③ La construction d'une tangente à un cercle en un point donné du cercle.

a) Tracer un rayon $\overline{OP}$

b) Construire une droite XY perpendiculaire au rayon $\overline{OP}$ en P .

c) La droite XY est tangente au $\odot O$ en P .



- ④ La construction d'une tangente à un cercle donné, à partir d'un point extérieur au cercle.

a) Tracer $\overline{OP}$

b) Construire une perpendiculaire sur le milieu du segment $\overline{OP}$, coupant $\overline{OP}$ en Q .

c) Avec Q comme centre et QO (ou QP) comme rayon, construire un cercle qui coupe $\odot O$ en A et B .

d) Tracer la demi-droite PA (ou PB)

e) PA est tangente au $\odot O$



OBJECTIF INTERMEDIAIRE ACTIVITES D'ENRICHISSEMENT

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Peut-on inscrire:

- a) un rectangle
- b) un carré
- c) un parallélogramme
- d) un quadrilatère,

dans un cercle

Si oui, à quelles conditions et comment?

2) Peut-on circonscrire un cercle avec

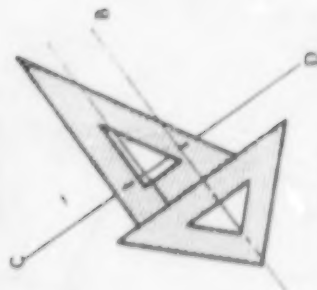
- a) un rectangle
- b) un carré
- c) un parallélogramme
- d) un quadrilatère.

Si oui, à quelles conditions et comment?

ANNEXE SUR LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

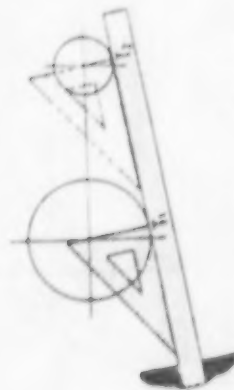
① TRACÉ D'UNE LIGNE OU DE PLUSIEURS PARALLÈLES À UNE OBLIQUE DONNÉE, À UNE OU À DES DISTANCES DÉTERMINÉES

1. Connaissant la ligne AB, élever une perpendiculaire CD à la ligne donnée AB.
2. Sur CD inscrire la ou les distances déterminées de la ligne AB, à l'aide d'une règle ou d'un compas.
3. Utiliser le té ou une équerre comme base parallèle à CD. Sur cette base, placer une équerre dont l'un des côtés coïncidera avec AB.
4. Faire glisser cette équerre sur CD, jusqu'au point inscrit (ou plusieurs) et tracer la parallèle à AB.



Tracé de parallèles à l'aide d'équerres

- ② TRACÉ D'UNE DROITE TANGENTE À DEUX CERCLES
- Placer l'arête supérieure d'un té ou d'une règle presque en contact avec les deux cercles et tracer la tangente commune. Des perpendiculaires à cette tangente, passant par les centres, déterminent les points de tangence T_1 et T_2 .



Tracé d'une droite tangente à deux cercles

③ BISSECTER UN SEGMENT

1. Soit le segment AB. Régler le compas pour un rayon plus grand de $1/2$ AB.
2. Utilisant A et B comme centres, tracer deux arcs dont les points d'intersection seront de part et d'autre de AB. Une droite passant par les deux points C et D, sera perpendiculaire à AB et la division sera en deux parties égales.



Bissection d'une droite

④ BISSECTER UN ANGLE

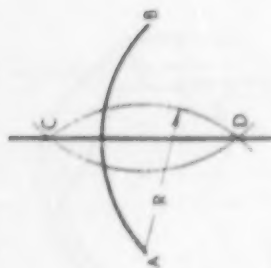
1. Soit l'angle ABC. Du sommet B, tracer un arc rencontrant BC au point D et BA au point E.
2. Des points D et E, tracer deux arcs se rencontrant au point F.
3. La ligne BF passant par F est la bissectrice désirée.



Tracé d'une bissectrice

⑤ BISSECTER UN ARC

1. Soit l'arc AB. Régler le compas pour un rayon plus grand que $1/2$ AB.
2. Utilisant A et B comme centres, tracer deux arcs qui se rencontreront de part et d'autre de l'arc AB. Une droite passant par les deux points C et D divisera l'arc AB en deux parties égales.

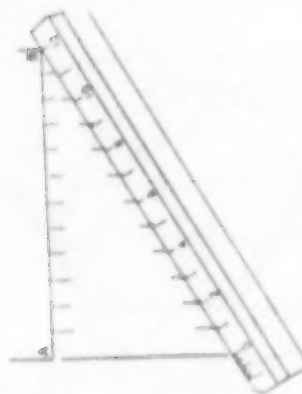


Bissection d'un arc

⑥ SUBDIVISER UNE DROITE EN PARTIES ÉGALES

Subdiviser, par exemple, la droite AB et douze parties égales.

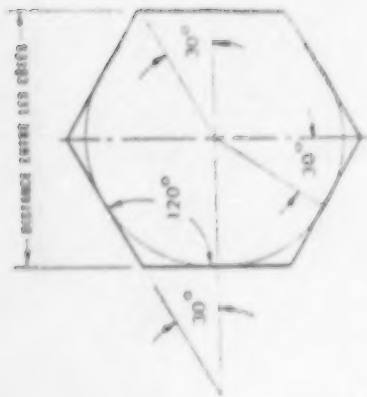
1. Du point A, élever une perpendiculaire à AB.
2. Ajuster une règle pour que le nombre requis de subdivision (12) soit compris entre le point B et la perpendiculaire. Marquer ensuite ces subdivisions par de légers traits verticaux.
3. De ces subdivisions, élever des perpendiculaires à la ligne AB.



Subdivision d'une droite en parties égales.

7) CONSTRUIRE UN HEXAGONE CONNAISSANT LA DISTANCE ENTRE LES CÔTES

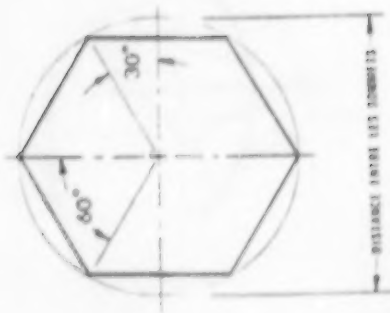
1. Tracer deux axes l'un vertical et l'autre horizontal.
2. Du point de rencontre, tracer légèrement le cercle de rayon égal à la demi-distance entre les côtés.
3. A l'aide de l'équerre de 60° , tracer six rayons formant des angles égaux.
4. De ces rayons, tracer six tangentes au cercle inscrit.



Tracer d'un hexagone connaissant la distance entre les côtés

8) CONSTRUIRE UN HEXAGONE, CONNAISSANT LA DISTANCE ENTRE LES SOMMETS

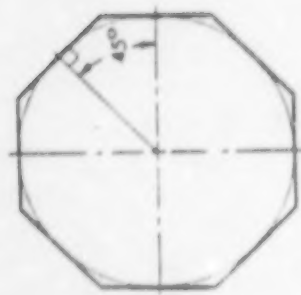
1. Tracer des axes vertical et horizontal. Du point de rencontre, tracer légèrement le cercle passant par les sommets.
2. A l'aide de l'équerre de 60° , marquer six points formant des angles égaux sur la circonférence.
3. Joindre ces points par des cordes.



Tracer d'un hexagone connaissant la distance entre les sommets

⑨ CONSTRUIRE UN OCTOGONE, CONNAISSANT LA DISTANCE ENTRE LES CÔTÉS

1. Tracer des axes vertical et horizontal.
Du point de rencontre, tracer légèrement un cercle de rayon égal à la demi-distance entre les côtés.
2. Tracer des tangentes verticales et horizontales.
3. A l'aide de l'équerre de 45° , tracer des tangentes formant des angles de 45° avec l'horizontale.



Trace d'un octogone connaissant la distance entre les côtés

⑩ CONSTRUIRE UN OCTOGONE, CONNAISSANT LA DISTANCE ENTRE LES SOMMETS

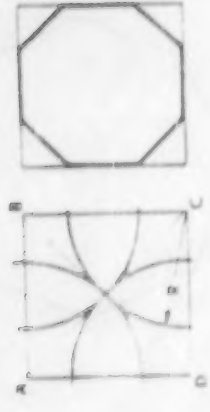
1. Tracer des axes vertical et horizontal et tracer légèrement le cercle de rayon égal à la demi-distance entre les sommets.
2. A l'aide de l'équerre de 45° , tracer des rayons entre les deux axes.
3. Joindre les rayons à l'aide de cordes.



Fig. 3.11 Trace d'un octogone connaissant la distance entre les sommets

⑪ INSCRIRE UN OCTOGONE RÉGULIER DANS UN
CARRÉ

1. Tracer les diagonales AC et BD du carré donné.
2. Utiliser les coins comme centres, tracer des arcs de cercle d'un rayon égal à la 1/2 diagonale intersectant les côtés du carré.
3. Joindre les points d'intersection.



Octogone régulier inscrit dans un carré

(12) CONSTRUIRE UN POLYGONE REGULIER, CONNAISSANT LA LONGUEUR D'UN CÔTÉ DONNÉ

Soit un polygone ayant sept côtés.

1. À partir du côté AB utilisé comme rayon tracer un demi-cercle. Subdiviser ce demi-cercle en sept parties égales, à l'aide d'un rapporteur ou du compas à pointes sèches.
2. De la deuxième subdivision à gauche, tracer le rayon A2.
3. Tracer des rayons en passant par les subdivisions 3, 4, 5 et 6 et les prolonger comme il est indiqué sur la figure.
4. Utilisant toujours le côté AB comme rayon, du point B comme centre, déterminer le point C sur le prolongement du rayon A6. Du point C, utilisant toujours AB comme rayon, déterminer le point D sur le prolongement du rayon A5. Faire de même pour déterminer les points E et F.
5. Joindre ces points à l'aide de droites. Ce procédé s'applique à tous les polygones réguliers.



Construction d'un polygone régulier connaissant la longueur d'un côté donné

(13) INSCRIRE UN PENTAGONE RÉGULIER DANS UN CERCLE

1. Soit le cercle O . Tracer le diamètre AB , et du centre O élever la perpendiculaire à AB .
2. Déterminer le point D , par la bissection de la ligne OB .
3. Du point D comme centre, utilisant DC comme rayon, tracer l'arc CE , le point E étant sur AB .
4. Avec C comme centre, utilisant CE comme rayon, tracer l'arc CF , le point F étant sur la circonférence du cercle circonscrit.
5. Utilisant la corde CF comme mesure, reporter cette longueur sur la circonférence pour déterminer les autres points et inscrire le pentagone.

POLYGONE RÉGULIER

Un polygone régulier est une figure plane fermée dont les côtés et les angles sont égaux entre eux.

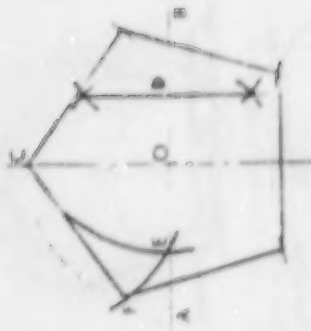
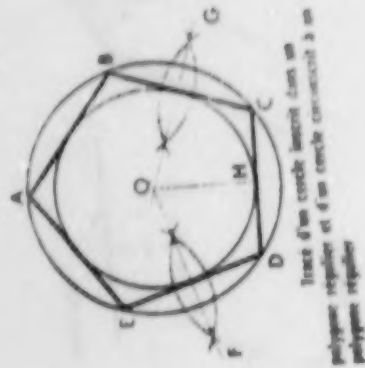


Fig. 3.11 Inscire un pentagone régulier dans un cercle

(14) TRACER UN CERCLE INSCRIT DANS UN POLYGONE RÉGULIER ET UN CERCLE CIRCONSCRIT À UN POLYGONE RÉGULIER

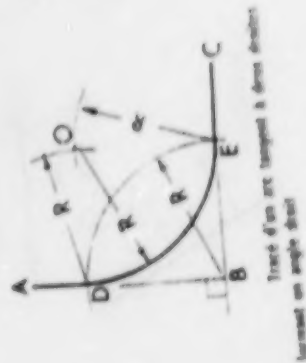
1. Tracer la bissectrice de deux côtés quelconques du polygone; BC et DE, par exemple. Le point de rencontre O des bissectrices FO et GO détermine le centre des cercles en question.
2. OH est le rayon du cercle inscrit et OA, celui du cercle circonscrit.



(15) CONSTRUIRE UN ARC DE CERCLE TANGENT AUX DEUX CÔTÉS D'UN ANGLE DROIT

Soit un arc de rayon R et l'angle droit B.

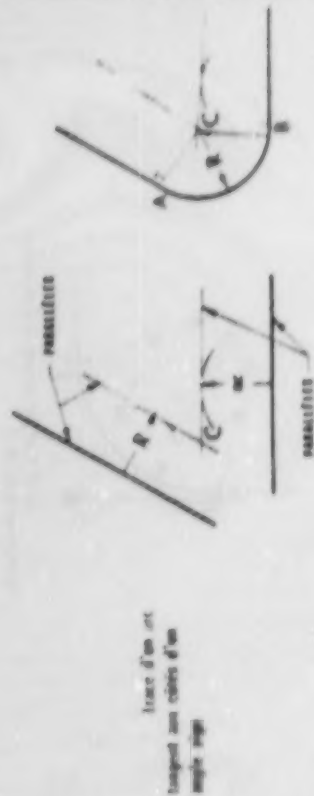
1. Du point B comme centre, tracer un arc d'un rayon égal à R, jusqu'aux intersections D et E sur les côtés de l'angle droit.
2. Des points D et E comme centres et R comme rayon, tracer des arcs se rencontrant en O.
3. Du point O, tracer l'arc qui, aux points D et E, sera tangent aux côtés de l'angle droit.



16) CONSTRUIRE UN ARC TANGENT AUX CÔTÉS D'UN ANGLE AIGU

Soit un arc de rayon R.

1. Tracer à l'intérieur de l'angle et à une distance égale à R, des droites parallèles aux deux côtés de cet angle.
2. Le point de rencontre C de ces deux parallèles détermine le centre de l'arc désiré.
3. À l'aide du compas réglé pour le rayon R, tracer l'arc tangent aux côtés de l'angle, en utilisant C comme centre.



17) CONSTRUIRE UN ARC TANGENT AUX CÔTÉS D'UN ANGLE OBTUS

Utiliser la même méthode que pour un angle aigu.



(18) CONSTRUIRE UN ARC TANGENT À UN CERCLE ET
À UNE DROITE DONNÉS

1. Soit le rayon R de l'arc désiré. Tracer une parallèle à la droite, entre cette dernière et le cercle, à une distance R .
2. Utilisant le centre du cercle, tracer un arc d'un rayon égal au rayon du cercle plus le rayon R , jusqu'au point de rencontre C avec la parallèle.
3. Avec C comme centre et R pour rayon, tracer l'arc demandé.

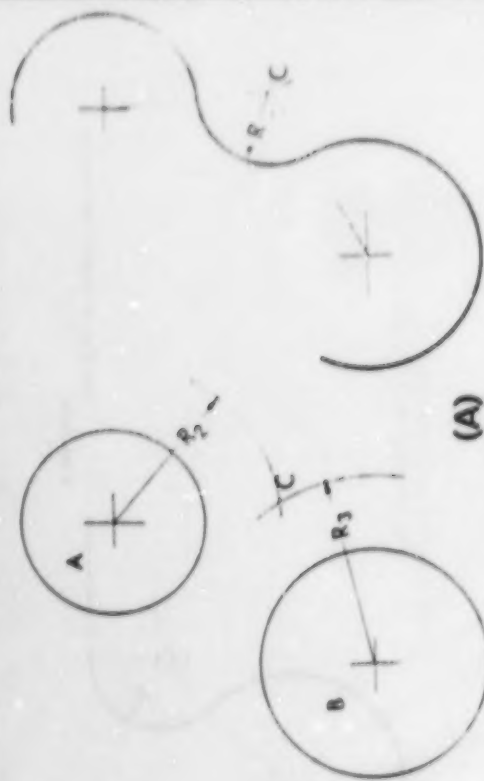


Trace d'un arc tangent à un cercle et à une droite

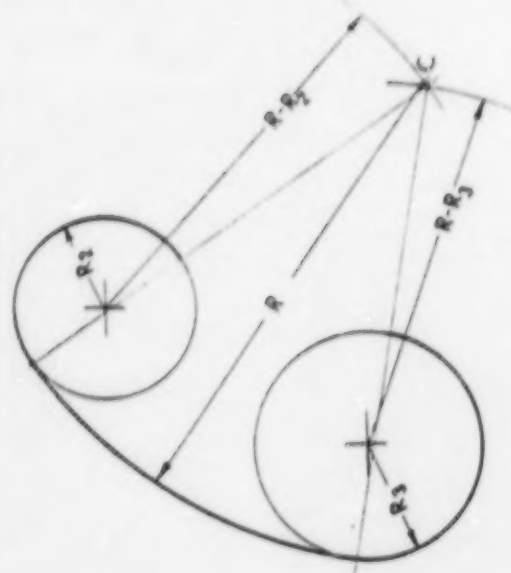
(19) CONSTRUIRE UN ARC TANGENT À DEUX CERCLES (fig. 3.21)

Figure A

1. Soit le rayon R . Tracer un arc ayant un rayon R_2 , égal au rayon du cercle A plus R , en utilisant le centre du cercle A.
2. Tracer un second cercle jusqu'au point de rencontre C des deux arcs, utilisant le centre du cercle B et un rayon R_3 , égal au rayon du cercle B plus R .
3. Du point C comme centre, tracer l'arc de rayon R , tangent aux deux cercles.



(A)



(B)

Figure B

1. Soit le rayon R . Utilisant le centre du cercle A, tracer un arc ayant un rayon égal à $R - R_2$ dans la région entre les deux cercles.
2. Utilisant le centre du cercle B, tracer un arc de rayon égal à $R - R_3$ qui coupera le premier arc en C.
3. Du point C comme centre, tracer l'arc tangent aux deux cercles donnés.

Tracer d'un arc tangent à deux cercles

(20) CONSTRUIRE UN CERCLE PASSANT PAR TROIS
POINTS QUELCONQUES NON EN LIGNE DROITE

1. Soit les points A, B et C. Joindre ces points comme sur la figure.
2. Tracer les bissectrices des lignes AB et BC, comme elles sont indiquées. Prolonger ces bissectrices jusqu'au point de rencontre O. Ce point O est le centre du cercle demandé.
3. Tracer le cercle en utilisant O comme centre.



Tracer d'un cercle passant par trois points quelconques non en ligne droite

(21) L'ELLIPSE

L'ellipse est une courbe plane fermée dont

chaque point est tel que la somme de ses distances à deux points fixes, appelés foyers est constante.

Le dessinateur doit souvent dessiner des ouvertures circulaires vues obliquement ou inclinées, qui prennent la forme d'ellipses. Il existe plusieurs méthodes précises et approximatives pour tracer des courbes.

CONSTRUIRE UNE ELLIPSE-MÉTHODE DES CERCLES CONCENTRIQUES

1. Tracer deux cercles concentriques, de diamètres égaux au grand et au petit axe donnés, appelés respectivement AB et CD.
2. Diviser les deux cercles en un certain nombre de parties égales, douze par exemple, et tracer des rayons.
3. Aux points de rencontre des rayons avec le grand cercle (point 1), tracer une parallèle à CD à l'intérieur du cercle.
4. Au point de rencontre du même rayon avec le petit cercle, tracer une parallèle à l'axe AB vers l'extérieur (point 2). L'intersection de ces lignes (point 3) détermine un point de

l'ellipse.

5. Réunir les points successifs, ainsi déterminés, par une courbe régulière.

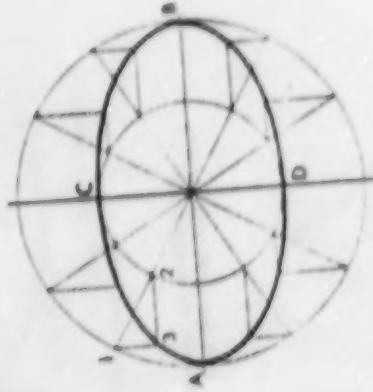
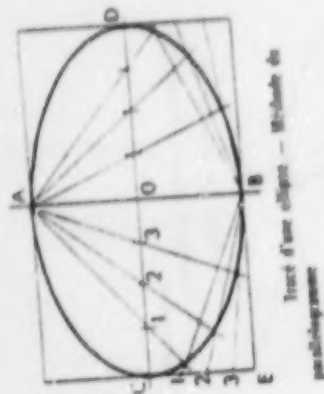


Fig. 3.23 Tracé d'une ellipse — Méthode des cercles concentriques

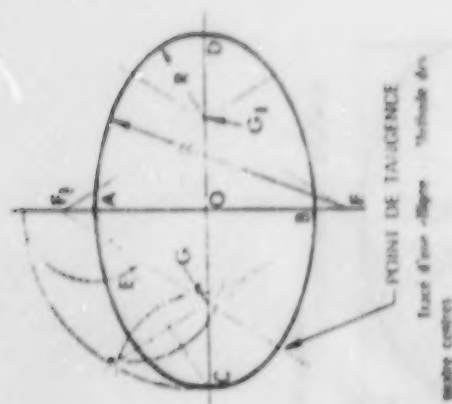
22) CONSTRUIRE UNE ELLIPSE - METHODE DU PARALLELOGRAMME

1. Construire un parallélogramme ayant la dimension du grand axe CD donné et celle du petit axe AB.
2. Diviser CD en un certain nombre de parties égales et diviser CE en un même nombre de parties égales.
3. Du point B, tracer des droites, joignant les subdivisions (1, 2 etc.) de la ligne CE. Du point A, tracer des droites passant par les points de subdivision de la ligne CD, jusqu'à leur point de rencontre avec les lignes reliées à B. Ces points de rencontre déterminent des points de l'ellipse.
5. Relier ces points par une courbe régulière.



(23) CONSTRUIRE UNE ELLIPSE - METHODE DES QUATRE CENTRES

1. Soit le grand axe CD et le petit axe AB. Joindre les points A et C par une droite.
2. Sur AC, déterminer la longueur AE égale CO moins AO.
3. Tracer la bissectrice de CE qui déterminera les points G sur CO, et F sur AB ou sur son prolongement.
4. Reporter le point F au point F_1 sur AB, pour que OF égale OF_1 , et le point G au point G_1 , pour que OG égale OG_1 .
5. Les points F, F_1 , G et G_1 sont les centres de deux grands et de deux petits arcs formant l'ellipse.



(24) CONSTRUIRE UNE ELLIPSE - MÉTHODES DE LA
BANDE DE PAPIER

Première méthode

Soit le grand axe CD et le petit axe AB.

1. Sur une bande de papier ou de carton, inscrire les demi-axes CO moins AO comme ils sont indiqués.
2. En plaçant le point a sur divers points de la ligne CD , tout en maintenant le point c en contact avec la ligne AB , le point o sera toujours un point de l'ellipse.

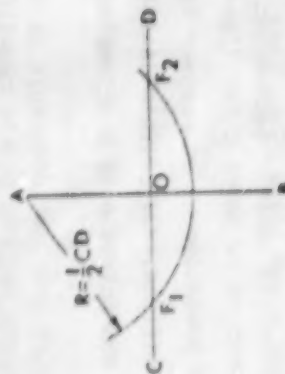


Fig. 3.27 Trace d'une ellipse — Méthode des
lignes

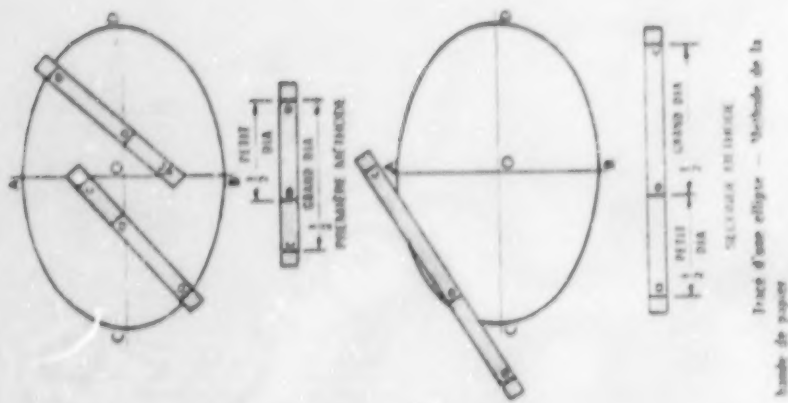
3. Inscrire diverses positions du point o pour toute la courbe et les relier par une courbe régulière.

Seconde méthode (voir page suivante)

Seconde méthode

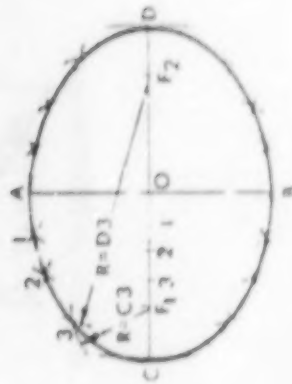
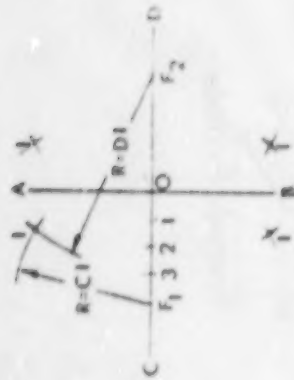
Soit le grand axe CD et le petit axe AB.

1. Sur une bande de papier ou de carton, inscrire les demi-axes co plus ao comme ils sont indiqués.
2. Placer le point a sur l'axe CD ou sur son prolongement et le point c sur l'axe AB ou sur son prolongement et marquer le point o de l'ellipse. Déterminer de la même manière des points pour l'ensemble de la courbe.
3. Relier ces points par une courbe régulière.



(25) CONSTRUIRE UNE ELLIPSE - METHODE DES Foyers

1. Le grand axe CD et le petit axe AB se coupent au point O. Du point A comme centre, tracer un arc de rayon R égal à CO (1/2 de CD). Les points de rencontre de l'arc avec l'axe CD déterminent les deux foyers F_1 et F_2 de l'ellipse.
2. Subdiviser OF_1 en un certain nombre de parties égales (quatre par exemple).
3. Du point F_1 comme centre et C_1 comme rayon tracer des arcs dans les quadrants de gauche.
4. Du point F_2 comme centre et D_1 comme rayon, tracer des arcs croisant les arcs tracés précédemment au point 1.
5. En invertissant les rayons, déterminer les points correspondants dans les quadrants de droite.
6. Répéter le même procédé en utilisant C_2 et D_2 comme rayons, avec F_1 et F_2 comme centres.
7. Répéter avec les autres longueurs de rayon, mesurées d'après les diverses longueurs de CD_1 , pour déterminer les points de repère de la courbe.
8. Relier ces points par une courbe régulière.

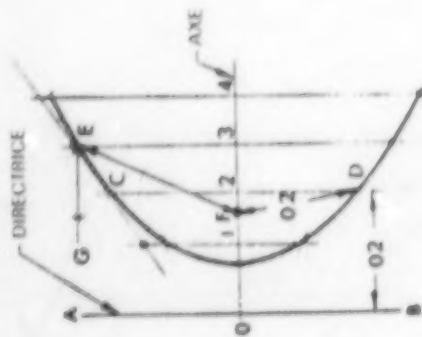


20. LA PARABOLE

La parabole est une ligne courbe non fermée dont chacun des points est situé à une égale distance d'un point fixe (foyer) et d'une droite fixe (directrice).

CONSTRUIRE UNE PARABOLE - MÉTHODE SCIENTIFIQUE

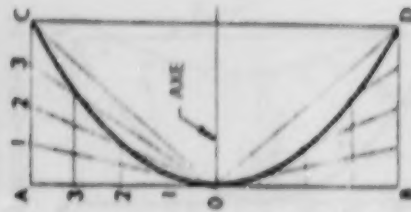
1. Soit un foyer F et une directrice AB. Par le foyer, construire une perpendiculaire à la directrice.
2. Tracer une parallèle quelconque à AB, croisant la ligne d'axe quelque part au point 2.
3. Avec F comme centre et un rayon égal à O2, tracer un arc croisant la parallèle passant par le point 2, au-dessus et au-dessous de l'axe. Les deux points ainsi déterminés C et D sont des points sur la parabole.
4. Tracer d'autres parallèles à la directrice et utiliser le même procédé pour déterminer d'autres points.
5. Rattacher ces points à l'aide du pistolet.
6. Pour tracer une tangente à un point quelconque E, joindre les points EF et tracer la droite EG parallèle à l'axe. La bissectrice de l'angle GEF sera la tangente à la courbe.



A) MÉTHODE SCIENTIFIQUE

(27) CONSTRUIRE UNE PARABOLE - MÉTHODE DU PARALLÉLOGRAMME

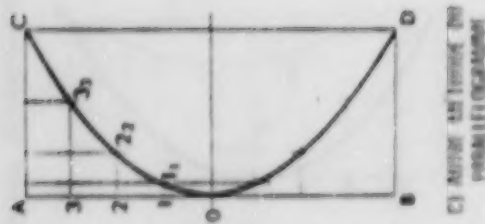
1. Soit les longueurs AB et AC. Construire un parallélogramme ayant ces dimensions. Du point O, centre de AB, mener une ligne d'axe perpendiculaire à AB.
2. Subdiviser AC en parties égales et AO en un même nombre de parties égales. Identifier chaque subdivision, selon l'illustration.
3. Mener une droite du point O au point 1 sur AC. Du point 1 sur OA, tracer une parallèle à l'axe. Le point de rencontre de cette dernière avec la ligne O1 est l'un des points de la parabole.
4. Utiliser la même méthode pour déterminer d'autres points de la courbe.
5. À l'aide du pistolet, tracer la courbe en reliant les différents points.



81 MÉTHODE DU PARALLÉLOGRAMME

(23) CONSTRUIRE UNE PARABOLE - AUTRE METHODE
DU PARALLELOGRAMME

1. Soit les longueurs AB et AC. Tracer un parallélogramme.
2. Subdiviser OA en quatre parties égales.
Subdiviser AC en un nombre de parties égales au carré des subdivisions de OA, c'est-à-dire $4^2 = 16$ parties égales.
3. La longueur O1 étant égale à $1/4$ de OA, le point 1 sur AC sera égal à :
 $1/4^2 = 1/16$ de AC, c'est-à-dire à la première subdivision.
4. O2 sur OA étant égal à $1/2$ de OA, le point 2 sur AC sera donc : $1/2^2 = 1/4$ de la longueur AC ou :
 $16 \times 1/4 = 4$ subdivisions.
5. O3 étant aux $3/4$ de OA, le point AC sera donc :
 $3/4^2 = 9/16$, $16 \times 9/16 = 9$ ou la 9e subdivision sur AC.
6. Tracer des parallèles à AC et à OA pour déterminer les points de la parabole et construire la courbe à l'aide du pistolet.



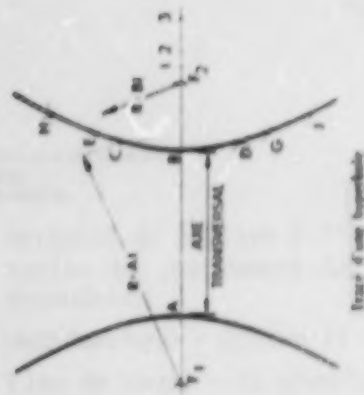
CE MODELE EST TENDU SUR
PARALLELOGRAMME

(29) L'HYPERBOLE

L'hyperbole est une courbe formée par des points sur un plan dont les distances à deux points fixes (foyers) de ce plan ont une différence constante.

CONSTRUIRE UNE HYPERBOLE

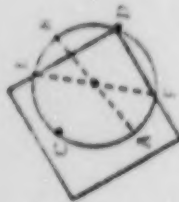
1. Soit l'axe transversal AB et les foyers F_1 et F_2 . Utilisant F_1 comme centre et un rayon plus grand que AF_2 (AI à la figure 3.31), tracer des arcs de part et d'autre de l'axe transversal.
2. Avec F_2 comme centre et un rayon égal à BI, tracer des arcs rencontrant les arcs déjà tracés aux points C et D situés sur l'hyperbole.
3. Recommencer le même procédé, utilisant des points différents, 2 et 3 par exemple, pour déterminer d'autres rayons et d'autres points de la courbe.
4. Relier ces points par une courbe régulière.



30 TROUVER LE CENTRE D'UN CERCLE

DOINÉ

1. Placer une feuille de papier sur le cercle de façon que le coin de la feuille soit sur le cercle.
2. La feuille intercepte le cercle en 2 autres points, soit A et B. Tracer AB
3. Placer la feuille à un autre endroit du cercle. Tracer EF.
4. Le point d'intersection de AB et EF est le centre du cercle.





Gouvernement du Québec
Ministère
de l'Éducation

9687-412